1.4 Pola skalarne i wektorowe

1.4.1 Wstęp

Rozdział ten jest poświęcony funkcjom położenia: skalarnym i wektorowym w przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{E}^3$ (*polom skalarnym i wektorowym*).

Zakładamy, że funkcje położenia skalarne i wektorowe są jednoznacznymi, ciągłymi i różniczkowalnymi odpowiednią ilość razy funkcjami współrzędnych, a tym samym wektora wodzącego $\boldsymbol{r} \equiv x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. Przedstawione w punktach 1.4.2-1.7.3 związki między funkcjami skalarnymi i wektorowymi będą w postaci niezmienniczej (niezależnie od układu współrzędnych), lub we współrzędnych wektora odniesionych do prawoskrętnego, kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych

(1.18)
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{F}(x,y,z) \equiv \boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_x(x,y,z) + \boldsymbol{j}F_y(x,y,z) + \boldsymbol{k}F_z(x,y,z).$$

Przedstawione związki nie zależą od wyboru układu współrzędnych opisującego położenie w przestrzeni. Omówimy również związki wektorowe we współrzędnych wektora mierzonych wzdłuż lub prostopadle do odpowiednich linii współrzędnych krzywoliniowych (a zatem w różnych punktach wzdłuż różnych kierunków).

1.4.2 Pola skalarne

Definicja 1.9. *Polem skalarnym* nazywamy funkcję

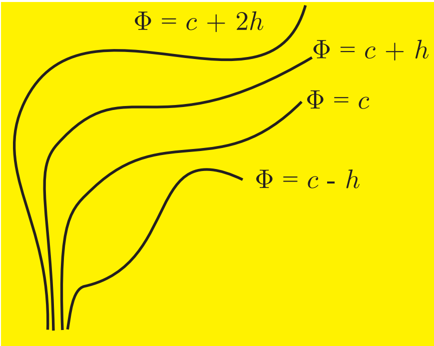
$$\Phi\colon D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^3,$$

tzn. funkcję, która każdemu punktowi $(x,y,z) \in D$ przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą (skalar). Funkcję taką nazywamy także *funkcją skalarną*. Powierzchnie o równaniach

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \equiv \Phi(x,y,z) = \text{const} = c \tag{1.19}$$

(p. [18], [19], [21]) nazywamy *poziomicami*, nazywamy również powierzchniami izoskalarnymi lub powierzchniami struktur potencjalnych. Powierzchnie izoskalarne pola skalarnego tworzą (p. w. 1.19), gdzie c jest parametrem (jednoparametrową rodziną). Umożliwiają one geometryczne przedstawienie pola skalarnego (patrz rys. 1.1)

a



Rysunek 1.1. Pole skalarne

Uwaga 1.3. Pole skalarne jest matematycznym abstraktem takich wielkości fizycznych, które w punkcie obszaru $\mathcal{D}$ charakteryzują się tylko liczbą. Przykładem *pola fizycznego*, które z punktu widzenia *matematyki jest polem skalarnym* jest *pole temperatury ciała*.

Uwaga 1.4. O polu skalarnym $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(x, y, z)$ mówimy, że jest ciągłe, różniczkowalne lub jest klasy C^n gdy funkcja $\boldsymbol{F}$ jest ciągła, różniczkowalna lub jest klasy C^n. Pole klasy C^0 nazywamy polem ciągłym, zaś klasy C^1 nazywamy polem gładkim.

1.4.3 Pola wektorowe

Definicja 1.10. *Polem wektorowym* (lub polem wektorów) nazywamy funkcję $\boldsymbol{F}$, która każdemu punktowi zbioru $D \subset \mathbb{R}^3$ przyporządkowuje dokładnie jeden wektor. *Linie pola* (*linie prądu*) wektorowego mają w każdym punkcie $(\boldsymbol{r})$ kierunek pola wektorowego $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$

i są określone równaniami różniczkowymi

$$\begin{aligned} & d\boldsymbol{r} \times \mathbb{F}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0} \\ \text{lub} \qquad & dx\colon dy\colon dz = F_x\colon F_y\colon F_z. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Interpretacja równań (1.20) jest następujaca: równanie $(1.20)_1$ wynika z warunku (patrz [15], [18]) kolinearności wektora $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ z wektorem $d\boldsymbol{r}$

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz$$

w przypadku linii skierowanych żądamy, by powyższe stosunki miały w $\forall$ punkcie wartość dodatnią.

Równanie $(1.20)_2$ wskazuje, że w tym przypadku dogodnie jest rozwiazywać układ równań

$$\frac{dx}{du} = \boldsymbol{F}_x, \qquad \frac{dy}{du} = F_y, \qquad \frac{dz}{du} = F_z$$

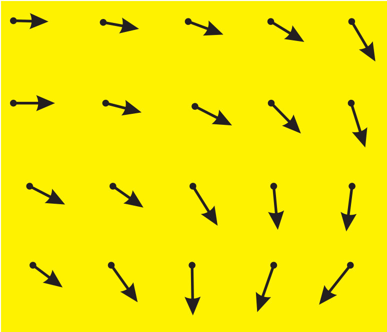
bowiem wtedy otrzymane linie są skierowane zgodnie z parametrem u.

Pole wektorowe jest *matematycznym atrybutem takich wielkości fizycznych, które w* $\forall$ *punkcie obszaru charakteryzują się liczbą* i *skierowaniem* (tzn. *kierunkiem* i *zwrotem*).

Przykładem pola fizycznego, które z punktu liczenia matematycznego jest polem wektorowym jest: pole elektrostatyczne $\boldsymbol{E}$, pole magnetyczne $\boldsymbol{H}$, pole wektorowe $\boldsymbol{F} = [F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)]$ mówimy, że jest *ciągłe*, różniczkowalne lub klasy C^2, jeżeli wszystkie jego współrzędne $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ są funkcjami ciągłymi, różniczkowalnymi lub są klasy C^n.

Pole klasy C^0 nazywamy **polem ciągłym** zaś klasy C^1 **polem gładkim**.

Pole wektorowe może być przedstawione geometrycznie liniami pola, przy czym względna gęstość linii pola jest w każdym punkcie $(\boldsymbol{r})$ proporcjonalna do wartości bezwzględnej $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|$ pola wektorowego (rys. 1.2) b



Rysunek 1.2. Pole wektorowe

Definicja 1.11. Kierunkiem (skierowaniem) pola wektorowego w punkcie nazywamy kierunek (skierowanie) wektora tego pola w tym punkcie. Pole wektorowe w obszarze generuje *pole kierunków* (pole skierowane) w tym obszarze.

Definicja 1.12. Linią pola wektorowego nazywamy krzywą, która w $\forall$ swoim punkcie ma kierunek (skierowanie) tego pola w tym punkcie.

1.4.4 Wektorowy element drogi i długość łuku

Wektorowy element drogi (*wektorowy element odległości*) $d\boldsymbol{r}$ wzdłuż krzywej C opisany równaniem:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad \text{lub} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1.21}$$

w każdym punkcie regularnym $(\boldsymbol{r}) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ określony jako

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz = \left(\boldsymbol{i}\frac{dx}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dy}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{dz}{dt}\right)dt = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}dt. \tag{1.22}$$

$d\boldsymbol{r}$ jest *w każdym punkcie regularnym* skierowany wzdłuż stycznej do krzywej C (patrz [14], [18]).

Długość łuku s (p. [16]) krzywej prostowalnej (1.21) jest dana wzorem ($t_0 < t$):

$$s = \int_{t_0}^{t} ds = \int_{C} ds,$$

gdzie

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \frac{ds}{dt} dt \\ &= \sqrt{d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}} = \sqrt{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}\, dt \end{aligned} \tag{1.23}$$

w każdym punkcie regularnym $(\boldsymbol{r}) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ krzywej.

1.4.5 Całki krzywoliniowe

Dany jest łuk prostowalny C opisany równaniem (1.21). Całki krzywoliniowe skalarne

$$\begin{aligned} &\int_C \Phi(\boldsymbol{r}) ds = \int_C \Phi(x, y, z) ds = \int_C \Phi(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt} dt, \\ &\int_C d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_C \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) dt \\ &= \int_C (F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, x) dy + F_z(x, y, z) dz) \\ &= \int_C \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \right) dt \end{aligned} \tag{1.24}$$

mogą być określone bezpośrednio jako granice sum w podobny sposób jak w [18], [21] jednak wygodniej jest podstawić funkcje $x(t)$, $y(t)$,

$z(t)$, dx/dt, dy/dt, dz/dt z równań (1.21) do wzoru (1.24) i całkować po t.

Podobnie określa się całki *krzywoliniowe wektorowe*

$$\begin{aligned}\int\limits_C d\boldsymbol{r}\Phi(\boldsymbol{r}) &= \int\limits_C \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Phi(\boldsymbol{r})dt\\ &= \boldsymbol{i}\int\limits_C \Phi(x,y,z)dx + \boldsymbol{j}\int\limits_C \Phi(x,y,z)dy + \boldsymbol{k}\int\limits_C \Phi(x,y,z)dz\\ &= \int\limits_C \left(\boldsymbol{i}\Phi(x,y,z)\frac{dx}{dt} + \boldsymbol{j}\Phi(x,y,z)\frac{dy}{dt} + \boldsymbol{k}\Phi(x,y,z)\frac{dz}{dt}\right)dt\end{aligned} \tag{1.25}$$

oraz

(1.26)

$$\begin{aligned}\int\limits_C d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) &= \int\limits_C \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\mathbb{R}(\boldsymbol{r})dt\\ &= \boldsymbol{i}\int\limits_C (F_z dy - F_y dz) + \boldsymbol{j}\int\limits_C (F_x dz - F_z dx) + \boldsymbol{k}\int\limits_C (F_y dx - F_x dy)\\ &= \int\limits_C\left(\boldsymbol{i}\left(F_z\frac{dy}{dt} - F_y\frac{dz}{dt}\right) + \boldsymbol{j}\left(F_x\frac{dz}{dt} - F_z\frac{dx}{dt}\right) + \boldsymbol{k}\left(F_y\frac{dx}{dt} - F_x\frac{dy}{dt}\right)\right)dt\end{aligned}$$

Jeżeli nie ma dodatkowych warunków na $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ (p. [18], [21]), to wartość całki krzywoliniowej skalarnej i wektorowej zależy od drogi całkowania C.

Odsyłamy czytelnika do rozdziału drugiego, w którym posługujemy się współrzędnymi krzywoliniowymi.

Uwaga 1.5. Często warto wprowadzić jako parametr w równaniach (7)-(9) długość łuku s określoną równaniem (6) (patrz [14]).

1.4.6 Całki powierzchniowe

W każdym punkcie regularnym $(\boldsymbol{u}, v)$ powierzchni dwustronnej S opisanej równaniem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ (p. [14], [18]) można określić *wektorowy*