

7. Eksperyment piąty – badanie stanu zawilgocenia ścian metodą tomografii impedancyjnej

Celem eksperymentu jest zapoznanie się z nowoczesną metodą badań nieniszczących stosowaną do oceny stanu zawilgocenia murów w budynkach. Omawiana metoda opiera się na teorii pola elektrycznego i pokazuje, jak szeroki zakres mogą mieć zastosowania elektrotechniki w różnych dziedzinach nauki.

7.1. Opis problemu



Rys. 7.1. Podciągana kapilarnie wilgoć z miejsc bezpośredniego styku między murem a glebą [4]

Podciągana kapilarnie z gruntu wilgoć jest problemem w budynkach, szczególnie starszych, z niewystarczającą izolacją poziomą i pionową ścian fundamentowych. Wilgoć jest podciągana z miejsc bezpośredniego styku między murem a glebą. Budowlane materiały porowate (np. cegła czy beton), zarówno naturalne, jak i produkowane, mają pory, podobnie jak gąbka, i wilgoć może być podciągana wbrew grawitacji nawet na wysokość 3 metrów. Dodatkowo niszczące działanie wilgoci wzmagają zawarte w wodzie gruntowej szkodliwe dla murów zanieczyszczenia: roztwory soli, zasad czy kwasy organiczne. Spada wytrzymałość muru, zawarta w nim woda zamarzając zimą i zwiększając swoją objętość może prowadzić do pękania murów, podobnie jak krystalizująca się sól (rys. 7.2). Wilgoć stwarza niebezpieczeństwo nie tylko dla murów, ale również dla zdrowia ludzi. Po pierwsze sprzyja ona powstawaniu schorzeń reumatycznych, po drugie – tworzące się na wilgotnej powierzchni ściany grzyby – mogą wywoływać alergie oraz wiele innych chorób. Istnieje wiele różnych systemów osuszania. Bardzo ważne jest ciągle kontrolowanie wilgotności muru w trakcie procesu osuszania.

Można je przeprowadzić stosując metody elektryczne, ponieważ konduktywność muru zmienia się wraz z jego wilgotnością i zasoleniem, na przykład beton zmienia swą rezystywność od 0,03 do 0,06 Ωm dla maksymalnego nasycenia wodą aż po 0,1 do 60 Ωm dla 40 % nasycenia [2]. Tomografia impedancyjna może być zastosowana do określenia rozkładu konduktywności wewnątrz badanego obiektu.



Rys. 7.2. Fragmenty murów uszkodzonych na skutek działania wilgoci [2]

7.2. Podstawy matematyczne

Problem matematyczny elektrycznej tomografii impedancyjnej polega na rozwiązaniu równań Maxwella dla pola przepływowego:

$$\gamma \mathbf{E} = \mathbf{J} \quad (7.1)$$

gdzie: \mathbf{E} – wektor natężenia pola elektrycznego [V/m],

\mathbf{J} – wektor gęstości prądu [A/m²],

γ – konduktywność [S/m].

Działając obustronnie operatorem dywergencji na równanie (7.1) otrzymamy:

$$\nabla \cdot (\gamma \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (7.2)$$

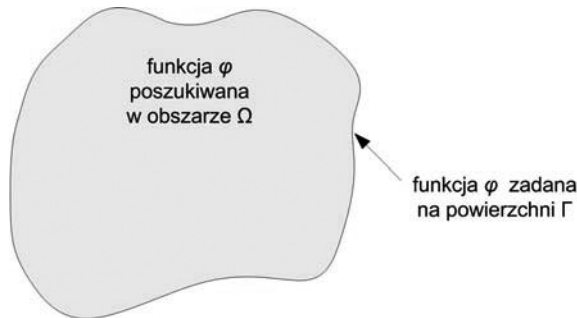
Ponieważ w polu przepływowym $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ mamy:

$$\nabla \cdot (-\gamma \text{grad } \varphi) = \text{div } \mathbf{J} \quad (7.3)$$

Równanie (7.3) dla środowisk jednorodnych można również zapisać jako:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\gamma} \text{div } \mathbf{J} \quad (7.4)$$

Równanie to nazywane jest równaniem Poissona. Jego rozwiązanie w pewnym obszarze Ω jest określone jednoznacznie, jeśli podana jest wartość φ na powierzchni Γ będącej brzegiem obszaru Ω oraz znany jest rozkład wektora gęstość prądu w obszarze Ω . Zatem do wyznaczenia φ należy podać jeszcze odpowiednie warunki brzegowe: Dirichleta, określające wartość potencjału φ na brzegu,



Rys. 7.3. Obszar Ω , w którym poszukiwane jest rozwiązanie równania Poissona

lub Neumanna, określające wartość pochodnej normalnej potencjału $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ na brzegu. Równanie (7.4) razem z warunkami brzegowymi opisuje zagadnienie proste pola elektromagnetycznego dla tomografii impedancyjnej.

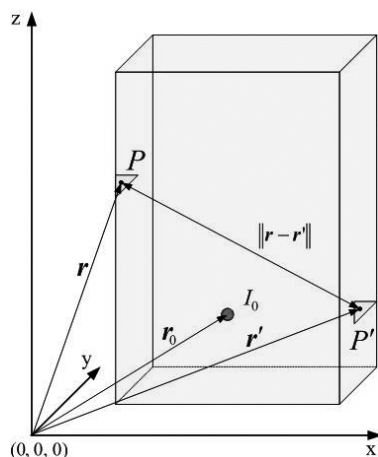
Rozwiązanie zagadnienia prostego metodą elementów brzegowych

Równanie różniczkowe (7.4) w przestrzeni 3D można zapisać jako:

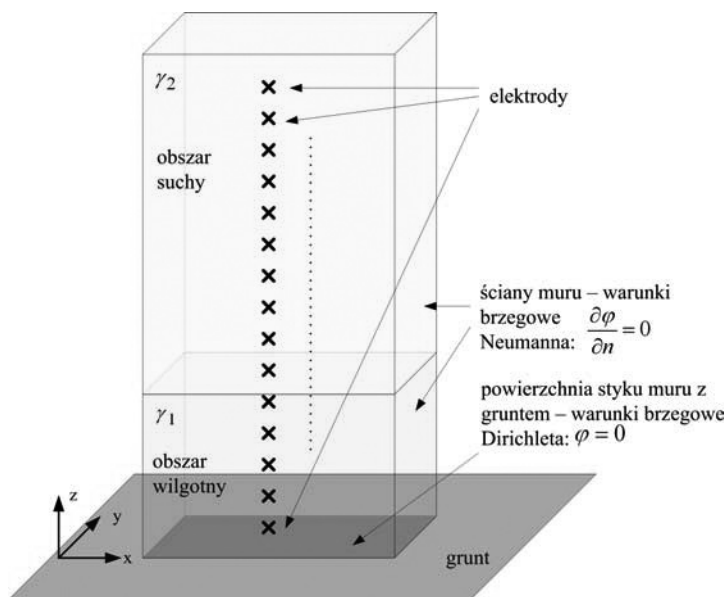
$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\gamma} \text{div } \mathbf{J} = -b \quad (7.5)$$

gdzie x , y oraz z – współrzędne kartezjańskie. Rozpatrując dowolny obszar, w którym szukane jest rozwiązanie, można przyjąć pewien punkt P' (nazywany punktem źródłowym) o współrzędnych x', y', z' oraz dowolny punkt P (nazywany punktem pola) o współrzędnych x, y, z . Brzegowe równanie całkowe równoważne równaniu (7.5) ma postać (6.3) jak podano w rozdziale 6.

Na rys. 7.4 przedstawiono analizowany obszar w przestrzeni 3D a na rys. 7.5 model badanego obiektu z przyjętymi warunkami brzegowymi zaznaczonymi elektrodami pomiarowymi.



Rys. 7.4. Obszar 3D przyjęty w eksperymencie



Rys. 7.5. Badany obszar z zaznaczeniem elektrod oraz warunków brzegowych

Źródła prądowe są modelowane jako źródła punktowe. W tym specjalnym przypadku funkcja b w punkcie wewnętrznym obszaru r_0 staje się równa $I_0 = I_0 \delta(r_0)$, gdzie I_0 jest amplitudą źródła a $\delta(r_0)$ jest funkcją delta Diraca, której całka jest równa 1. Przyjmując, że wewnątrz obszaru jest n_q par źródeł można zapisać:

$$\frac{1}{2} \varphi(r) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} G(r, r') \varphi(r') d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n} G(r, r') d\Gamma + \sum_{i=1}^{n_q} (I_{0,i}^+ G(r_{0,i}^+, r') - I_{0,i}^- G(r_{0,i}^-, r')) \quad (7.7)$$

gdzie $r_{0,i}^+$ i $r_{0,i}^-$ - promienie położenia źródeł odpowiednio I_0^+ i I_0^- . W przestrzeni 3-D rozwiązanie fundamentalne równania (7.7) jest równe:

$$G(r, r') = \frac{1}{4\pi R} \quad (7.8)$$

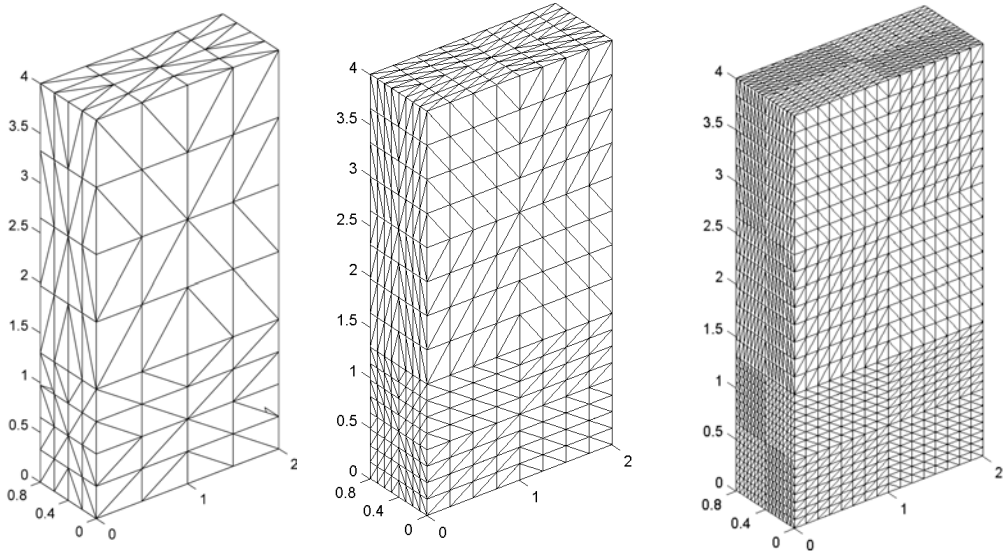
gdzie $R = \|r - r'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Zagadnienie proste opisane równaniem (7.8) rozwiązano metodą elementów brzegowych, dzieląc brzeg obszaru trójkątami elementami brzegowymi zerowego rzędu (rys. 7.6). Po przeprowadzeniu całkowania oraz wprowadzeniu do układu warunków brzegowych otrzymano równanie macierzowe postaci:

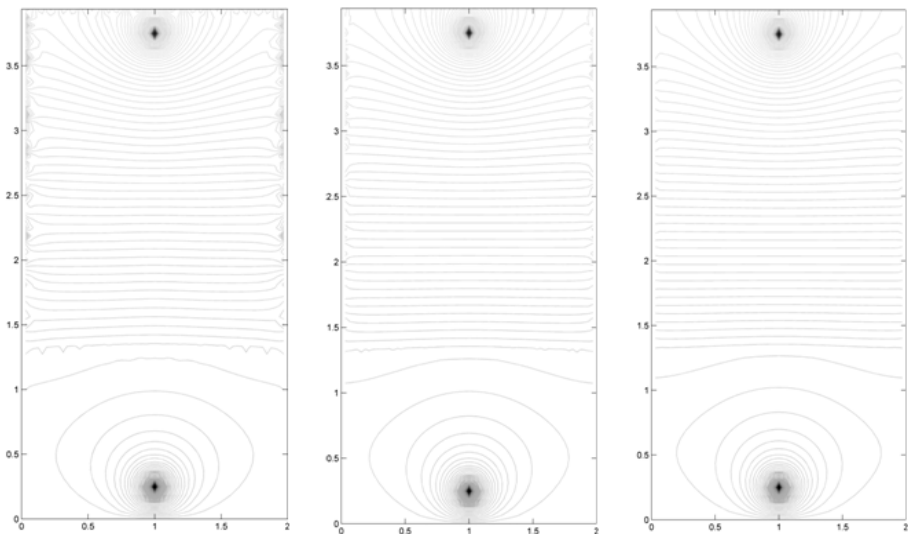
$$\mathbf{AX} = \mathbf{F} \quad (7.10)$$

Macierz \mathbf{A} jest pełna i niesymetryczna. Po rozwiązaniu układu równań otrzymuje się rozkład potencjału na brzegu obszaru. Pozwala to na obliczenie rozkładu potencjałów również w jego wnętrzu oraz na elektrodach pomiarowych.

Na rys. 7.6 przedstawiono badany obiekt z proponowanym w rozwiązaniu podziałem na elementy brzegowe o różnych gęstościach siatki. Przedstawiono na nim dyskretyzację brzegu obiektu prostokątnego elementami zerowego rzędu kolejno w postaci: 384, 1536 i 6144 elementów.



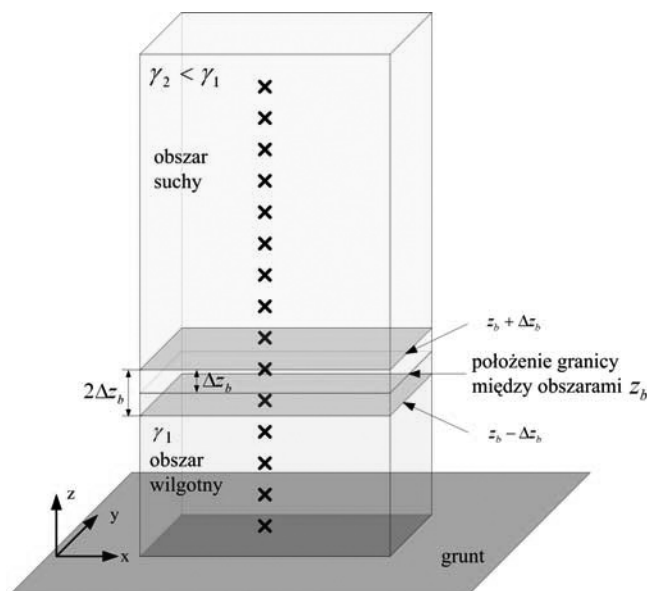
Rys. 7.6. Podział obszaru na elementy brzegowe dla różnych gęstości siatki



Rys. 7.7. Rozkłady linii ekwipotencjalnych dla siatek z rys. 7.6. dla płaszczyzny bocznej o większej powierzchni

7.3. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego metodą elementów brzegowych

Dzięki rozwiązaniu zadania prostego uzyskano rozkład napięć przy zadanym wymuszeniu oraz danym położeniu z_b granicy między obszarem suchym a wilgotnym. Zadanie odwrotne pozwala na określenie położenia granicy z_b na podstawie danych pomiarowych z elektrod. Rozwiązując zadanie odwrotne należy wielokrotnie rozwiązać zadanie proste tak, aby w procesie iteracyjnym otrzymać rozkład napięć maksymalnie zbliżony do uzyskanego z pomiarów. Innymi słowy w procesie iteracyjnym szukane jest minimum funkcji celu F_C określonej jako suma kwadratów różnic napięć obliczanych w kolejnych krokach oraz napięć pomierzonych:



Rys. 7.8. Ilustracja perturbacji przy wyznaczeniu pochodnej centralnej

$$F_C = \sum_{j=1}^p F_{Cj}(z) = \sum_{j=1}^p (f_{Cj} - v_j)^T (f_{Cj} - v_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_e-3} (f_{Cji} - v_{ji})^2 \quad (7.11)$$

gdzie: j – położenie źródła (j -ta projekcja),

f_j – wektor napięć obliczonych na elektrodach pomiarowych dla j -tej projekcji,

v_j – wektor napięć zmierzonych na elektrodach pomiarowych dla j -tej projekcji,

p – liczba projekcji,

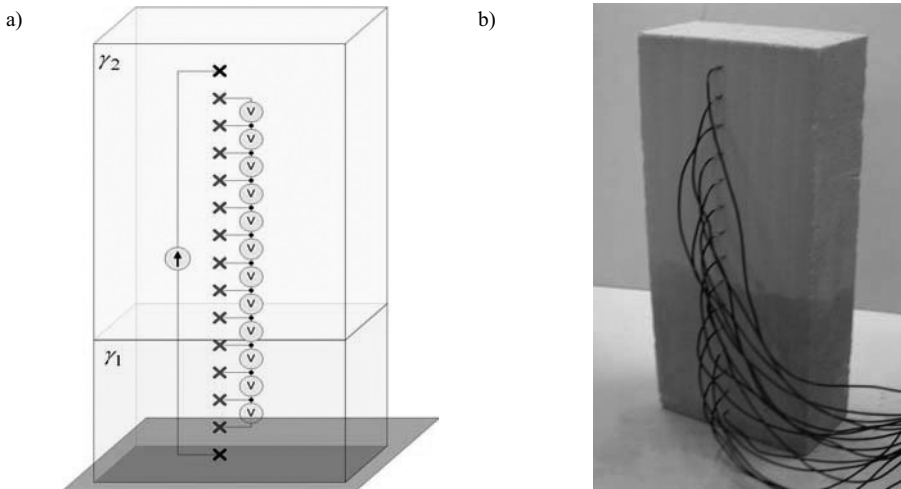
n_e – liczba elektrod.

W każdym kroku iteracyjnym niezbędne jest obliczenie pochodnej funkcji celu $\frac{dF_C}{dz}$. Do minimalizacji funkcji celu zastosowano algorytm zmiennej metryki (ang. *Variable Metric*) [6].

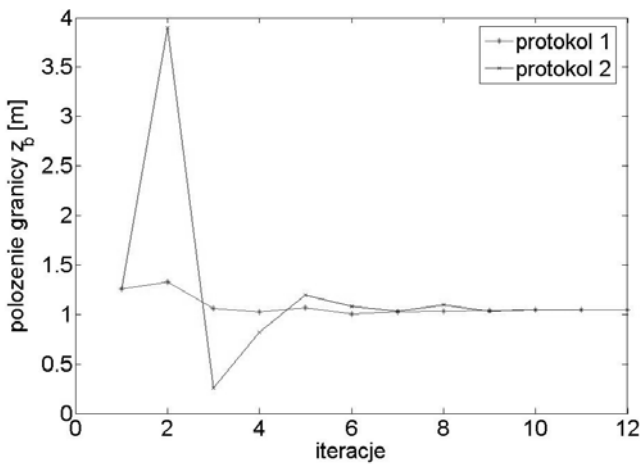
7.4. Sposób przeprowadzania pomiarów

W eksperymencie przeprowadzono pomiary wg dwóch różnych protokołów pomiarowych:

- dla jednego kąta projekcji: zasilając skrajne elektrody oraz mierząc napięcia na pozostałych, (rys. 7.9),
- dla $n_e - 1$ kątów projekcji: zasilając sąsiadujące elektrody i mierząc na pozostałych. Położenie źródła przesuwano stopniowo w górę od położenia e_1 do położenia e_{14} . Rezultaty obliczeń w postaci przebiegu procesu iteracyjnego dla dwóch zaproponowanych kątów projekcji przedstawiono na rys. 7.10.



Rys. 7.9. Sposób przeprowadzania pomiarów: a) dla pobudzenia skrajnych elektrod, b) fotografia badanego fantomu muru z elektrodami pomiarowymi

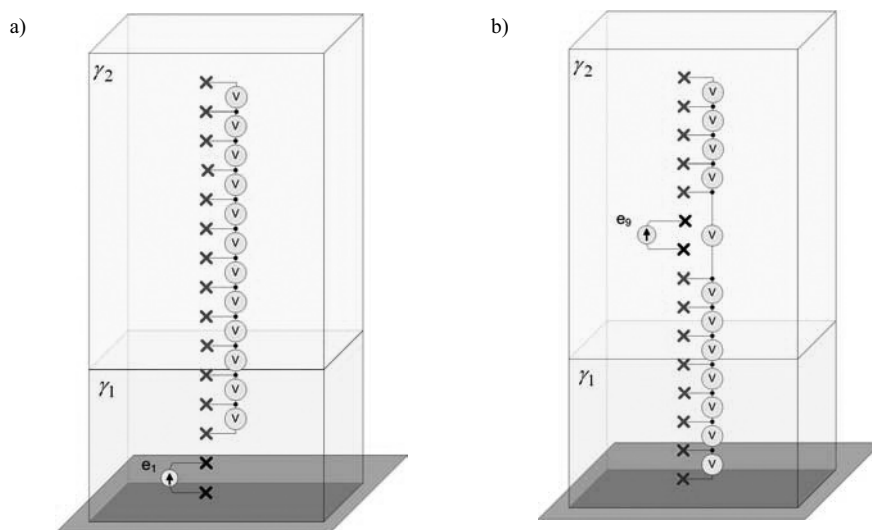


Rys. 7.10. Przebieg procesu iteracyjnego dla różnych protokołów pomiarowych

Na rys. 7.11 przedstawiono, na podstawie danych symulacyjnych, szukane położenie z_b granicy między obszarami dla dwóch różnych sposobów przeprowadzania pomiarów. W obu przypadkach proces iteracyjny rozpoczął się w punkcie 1,26 m. Szukane położenie granicy to 1,05 m.

Wyniki przedstawiono w poniższej tabeli.

protokół pomiarowy	z_b [m]	Δz_b [m]	Ilość iteracji
1	1,0492	0,00798	11
2	1,04756	0,02439	10



Rys. 7.11. Sposób przeprowadzania pomiarów dla 14 kątów projekcji: a) pierwszy kąt projekcji, b) dziewiąty kąt projekcji

Wyniki pomiarów dla 14 kątów projekcji można zanotować w tabeli 7.1 lub w tabeli 7.2 przy zastosowaniu protokołu pomiarowego z jedną projekcją.

Tabela 7.1. Napięcia między elektrodami pomiarowymi dla 14 kątów projekcji

elektrody		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	U [mV]	—	—	-	-	-							-			
2	U [mV]		—	—	-	-										
3	U [mV]			—	—											
4	U [mV]				—	—										
5	U [mV]					—	—									
6	U [mV]						—	—								
7	U [mV]							—	—							
8	U [mV]								—	—						
9	U [mV]									—	—					
10	U [mV]										—	—				
11	U [mV]											—	—			
12	U [mV]												—	—		
13	U [mV]													—	—	
14	U [mV]														—	—

Tabela 7.2. Napięcia między elektrodami pomiarowymi dla jednego kąta projekcji

elektrody	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
U [mV]													

Otrzymane wyniki pomiarów eksperymentalnych porównano z wynikami symulacji komputerowych dla różnych gęstości siatek. Można stwierdzić, że opracowany program symulacyjny został napisany poprawnie, gdyż osiągnięto zbieżność wyników pomiarowych i symulacyjnych. Spośród testowanych dwóch gęstości siatek (384 i 1536 elementów brzegowych) wyniki dokładniejsze uzyskano dla większej liczby elementów brzegowych. Wyniki pomiarów wykorzystano również do rozwiązania zagadnienia odwrotnego tomografii impedancyjnej..