V. Przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa (wektorowa) V nad ciałem K to addytywna grupa abelowa (V, +, 0) tzn. działanie + spełnia warunki (elementy zbioru V nazywamy **wektorami**)

(L1) dla dowolnych $x, y, z \in X$ $\quad (x+y)+z = x+(y+z)$

(dodawanie wektorów jest **łączne**),

(L2) dla dowolnego $x \in X$ $\quad 0+x = x+0 = x$

(wektor 0 jest **neutralny**),

(L3) dla dowolnego $x \in X$ istnieje $(-x) \in X$, że $x+(-x)=(-x)+x=0$

(wektor –x jest **odwrotny** (przeciwny) do x),

(L4) dla dowolnych $x, y \in X$ $\quad x+y = y+x$

(dodawanie wektorów jest **przemienne**),

w której określono mnożenie wektorów przez elementy ciała K (**skalary**)

$K \times V \to V : (\alpha, x) \to \alpha x$ (wynik tego mnożenia jest wektorem)

spełniające warunki

(L5) dla dowolnego $x \in X$ $\quad 1 \cdot x = x$,

(L6) dla dowolnych $x \in X,\ \alpha, \beta \in K$ $\quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

(L7) dla dowolnych $x, y \in X,\ \alpha \in K,$ $\quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

(L8) dla dowolnych $x \in X,\ \alpha, \beta \in K,$ $\quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,

Najczęściej będziemy rozpatrywać przestrzenie liniowe nad ciałem liczb rzeczywistych *R*.

Niepusty podzbiór $U \subset V$ przestrzeni liniowej (*V*, +, 0) nazywamy jej **podprzestrzenią liniową** gdy (*U*, +, 0) jest przestrzenią liniową.

Przykład

Dowolne ciało jest przestrzenią liniową nad samym sobą i nad dowolnym swoim podciałem.

Przykład
Zbiór złożony tylko z jednego elementu (wektora zerowego) {0} jest przestrzenią liniową. Wystarczy przyjąć

$$0 + 0 = 0 \qquad \text{i} \ \forall\, \alpha \in K, \qquad \alpha 0 = 0$$

Taką przestrzeń liniową nazywamy trywialną lub zerową.

Przykład
Zbiór $M_{\mathrm{m,n}}$ macierzy m x n z działaniem dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową nad R. Wektorem zerowym jest macierz zerowa.
Szczególnym przypadkiem tej przestrzeni liniowej jest $M_{\mathrm{m,1}}$ zbiór macierzy kolumnowych (wektorów).

Przykład
Zbiór $\mathrm{W_n}$ wielomianów stopnia najwyżej n (przyjmujemy, że w zbiorze tym jest wielomian zerowy) z działaniem dodawania wielomianów i mnożenia wielomianów przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową nad R. Wektorem zerowym jest wielomian zerowy.
Również zbiór wszystkich wielomianów R[x] jest przestrzenią liniową nad R.

Przykład
Zbiór $C[a, b]$ funkcji ciągłych na zbiorze $[a, b]$ z działaniem dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową nad R, bo suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą i iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę rzeczywistą jest funkcją ciągłą na rozpatrywanym przedziale. Wektorem zerowym jest funkcja stała równa zero.

Przykład
Zbiór $\mathrm{R^n}$ ciągów rzeczywistych długości n z działaniem dodawania ciągów i mnożenia ciągów przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową nad R.
Jeśli $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in R^n$, $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \in R^n$, $a \in R$, wtedy

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) =$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n) \in R^n$$

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \in R^n$$

Wektorem zerowym jest ciąg o wszystkich elementach równych zero $0 = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}) \in R^n$.

Niekiedy wektory $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ zapisuje się w postaci macierzy $\begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i nazywa wektorami kolumnowymi. Zapis ten jest szczególnie przydatny gdy wektor jest elementem działań na macierzach.

Wektor

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$, o współczynnikach $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$.

Niech *W* będzie dowolnym niepustym podzbiorem wektorów przestrzeni *V*. Przez Lin(*W*) oznaczymy zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z *W*, tzn.

$$\mathrm{Lin}(W) = \{\, a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k : x_1, x_2, \dots, x_k \in W; \,\},$$

$$a_1, a_2, \dots, a_k \in K;\ k = 1, 2, \dots$$

Lin(*W*) nazywa się niekiedy **powłoką liniową zbioru** W. Jeśli Lin(*W*) = *V*, to mówimy, że zbiór *W* **generuje** (rozpina) przestrzeń *V*.

Własności

a) Lin(*W*) jest podprzestrzenią liniową przestrzeni *V*,
b) Lin($x_1, x_2, \dots, x_k$) jest najmniejszą podprzestrzenią liniową przestrzeni *V* zawierającą wektory $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$,
c) Lin(Lin(*W*)) = Lin(*W*),

Przykład
W przestrzeni liniowej R^3, jeśli $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, to
Lin(*x, y*) = $\{(a,\ b\ ,0) \in R^3;\ a,b \in R\}$

Przykład
W przestrzeni liniowej $R[x]$, Lin(1, *x*, x^2) = W_2.

Wektory $x_1\ ,x_2\ ,.....,x_k \in V$ są **liniowo niezależne** jeśli wektor zerowy nie może być ich kombinacją liniową o niezerowych współczynnikach tzn. z równości $a_1x_1\ +\ a_2x_2\ +\ ...\ +\ a_kx_k\ = 0$ wynika, że $a_1\ = a_2\ = ... = a_k\ = 0$, (w przeciwnym przypadku elementy te są **liniowo zależne**).
Nieskończony układ wektorów jest liniowo niezależny jeśli każdy skończony jego podzbiór jest liniowo niezależny.

Własności
a) układ wektorów liniowo niezależnych nie może zawierać wektora zerowego,
b) pojedynczy wektor jest liniowo niezależny, gdy jest niezerowy,
c) dowolny podzbiór układu wektorów liniowo niezależnych jest liniowo niezależny,
d) układ wektorów jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy pewien wektor z tego układu daje się przedstawić w postaci kombinacji liniowej pozostałych.

Przykład
W przestrzeni liniowej R^3, wektory $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, są liniowo niezależne, bo jeśli $ax + by = 0$, to $(a,\ b\ ,0) = (0,0,0)$ i z równości ciągów wynika, że $a = 0$, $b = 0$.
Natomiast wektory $x = (1, 1, 0)$, $y = (2, 2, 0)$, są liniowo zależne, bo $2x - y = 0$, czyli kombinacja liniowa tych wektorów o współczynnikach 2, –1 daje wektor zerowy.

Przykład

W przestrzeni liniowej R[x] , wektory 1, x, x^2 są liniowo niezależne, bo jeśli $a + bx + cx^2 = 0$ (równość musi zachodzić dla dowolnego x), to $a = b = c = 0$.

Natomiast wektory 1 – x, 2x, 4 są liniowo zależne, bo 2·(1 – x) + 2x – 0,5·4 = 0, czyli kombinacja liniowa tych wektorów o współczynnikach 2, 1, –0,5 daje wektor zerowy.

Uwaga

W przestrzeni wektorowej R^n liniową niezależność wektorów można badać za pomocą rzędu macierzy, której wiersze lub kolumny to składowe rozpatrywanych wektorów. Zachodzi bowiem własność: wektory x^1, x^2, ..., $x^k \in R^n$, gdzie $x^i = \left(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\right)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rz\begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \vdots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \vdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \vdots & x_n^k \end{bmatrix} = k$$

Jeśli $k > n$ to elementy x^1, x^2, ..., $x^k \in R^n$ muszą być liniowo zależne (rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy).

Jeśli $k = n$ to elementy x^1, x^2, ..., $x^n \in R^n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det\begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \vdots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \vdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \vdots & x_n^n \end{bmatrix} \neq 0$$

Przykład

W przestrzeni liniowej R^3 , wektory $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, $z = (0, 1, 1)$ są liniowo niezależne, bo $\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$.

Natomiast wektory $x=(1,1,0)$, $y=(2,3,1)$, $z=(1,2,1)$ są liniowo zależne, bo $\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=0$.

Baza przestrzeni liniowej

Bazą przestrzeni liniowej V nazywamy uporządkowany układ liniowo niezależnych wektorów $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots \in V$ taki, że każdy wektor x tej przestrzeni jest ich kombinacją liniową, tzn. istnieją $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in K$, że $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Taką kombinację liniową nazywamy rozkładem wektora x w bazie $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, a liczby $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ **współrzędnymi wektora** x w tej bazie.

Własności

a) w każdej nietrywialnej przestrzeni liniowej istnieje baza,
b) każde dwie bazy danej przestrzeni są równoliczne,
c) baza to maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych w danej przestrzeni, tzn. jeśli do bazy dołączymy dowolny wektor to otrzymany układ wektorów musi być liniowo zależny,
d) jeśli $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ jest bazą i $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$ jest dowolnym układem wektorów liniowo niezależnych to $m \le n$ i wektory $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$ można uzupełnić pewnymi n – m elementami spośród $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ do bazy (**twierdzenie Steinitza o wymianie**), zatem każdy liniowo niezależny układ wektorów można uzupełnić do bazy,
e) każdy wektor przestrzeni liniowej można przedstawić tylko w jeden sposób jako kombinację liniową wektorów bazy tej przestrzeni.

Przykład

W przestrzeni liniowej R^3 , wektory $x=(1,0,0)$, $y=(0,1,0)$, $z=(0,1,1)$ tworzą bazę, bo są liniowo niezależne i jest to maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych w tej przestrzeni.

Przykład

Niech $e^1 = (1,0,...,0)$, $e^2 = (0,1,0,...,0)$, ..., $e^n = (0,0,...,0,1)$ (w wektorze e^k jedynka znajduje się na k - tej pozycji). Wektory te tworzą bazę przestrzeni liniowej R^n. Bazę tą nazywamy **bazą standardową** tej przestrzeni.

Jeśli $e^1, e^2, ..., e^n$ jest bazą standardową w R^n i $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ jest dowolnym elementem tej przestrzeni to x można zapisać w postaci

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + ... + x_n e^n$$

zatem współrzędne wektora są jednocześnie współczynnikami jego rozwinięcia w bazie standardowej.

Przykład

W przestrzeni liniowej W_2 wektory $1, x, x^2$ tworzą bazę, bo są liniowo niezależne i $\text{Lin}(1, x, x^2) = W_2$.

W przestrzeni liniowej W_n wektory $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$ tworzą bazę.

W przestrzeni liniowej $R[x]$ wektory $1, x, x^2, x^3, ...$ tworzą bazę.

Jeśli baza składa się z n wektorów, to mówimy, że V jest **przestrzenią *n* wymiarową** i piszemy $\dim V = n$. W przeciwnym przypadku V jest przestrzenią nieskończenie wymiarową i piszemy $\dim V = \infty$. Przyjmuje się też, że przestrzeń zerowa ma wymiar zero.

Przykład

$\dim R^n = n$.

Przykład

$\dim W_n = n + 1$.

$\dim R[x] = \infty$.

Suma prosta podprzestrzeni liniowych

Jeśli w przestrzeni liniowej V podzbiory V_1, V_2 są podprzestrzeniami liniowymi, to również zbiory

$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$ i $V_1 \cap V_2$

są podprzestrzeniami liniowymi.

Gdy V_1, V_2 mają skończone wymiary to

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

Szczególnie ważny jest przypadek, gdy $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
Jeśli $V = V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni V_1, V_2. Stosujemy wtedy zapis $V = V_1 \oplus V_2$.
Równoważne warunki dla $V = V_1 \oplus V_2$:

1) $V = V_1 + V_2$ i $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$,
2) dowolny wektor v z przestrzeni V ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $v = v_1 + v_2$; $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$,
3) połączenie baz podprzestrzeni V_1, V_2 jest bazą przestrzeni V.

Przykład
$R^{n+m} = R^n \oplus R^m$.

Przestrzeń rozwiązań układu równań jednorodnych

Rozpatrzmy nieoznaczony, jednorodny układ równań liniowych (RJ):

$$AX = 0$$

Niech $r = \text{rz}A$, n – liczba niewiadomych $r < n$.

Własność
Rozwiązania układu jednorodnego (RJ) są elementami podprzestrzeni przestrzeni liniowej R^n (wektor zerowy jest rozwiązaniem RJ, suma rozwiązań RJ jest rozwiązaniem RJ, jeśli rozwiązanie RJ pomnożymy przez stałą to otrzymamy rozwiązanie RJ). Zatem rozwiązania RJ tworzą podprzestrzeń w przestrzeni liniowej R^n.

Stosując przekształcenia elementarne (patrz metoda eliminacji Gaussa) możemy przekształcić macierz współczynników do postaci **normalnej**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} \end{bmatrix} = [\text{I}|\text{P}]$$

I_{rxr} – macierz jednostkowa, $P_{rx(n-r)}$ – macierz współczynników przy parametrach.

Zatem otrzymaliśmy równoważny układ równań liniowych

$$[I|P]X = 0$$

Podstawiając kolejno za zmienne $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ składowe bazy standardowej $e^1, e^2, ..., e^{n-r}$ przestrzeni R^{n-r} obliczamy $x_1, x_2, ..., x_r$ z poszczególnych równań i zestawiając je otrzymamy **rozwiązania fundamentalne**:

$$F^1, F^2, ..., F^{n-r}$$

Twierdzenie
Dowolne rozwiązanie RJ ma postać

$$(**) \qquad X = \lambda_1 F^1 + \lambda_2 F^2 + ... + \lambda_k F^k$$

$$k = n - r,$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in R$ (dowolne liczby)

(jest kombinacją liniową elementów $F^1, F^2, ..., F^{n-r}$)

Zatem zbiór rozwiązań tworzy przestrzeń R^{n-r} i rozwiązania fundamentalne $F^1, F^2, ..., F^{n-r}$ są bazą tej przestrzeni.

Rozpatrzmy nieoznaczony, niejednorodny układ równań liniowych (RN):

$$AX = B$$

Własność
Jeśli do wybranego rozwiązania układu niejednorodnego (RN) dodamy dowolne rozwiązanie układu jednorodnego (RJ) to otrzymamy rozwiązanie RN.

Twierdzenie
Dowolne rozwiązanie RN ma postać

$$(***) \qquad X = F^0 + \lambda_1 F^1 + \lambda_2 F^2 + ... + \lambda_k F^k$$

$$k = n - r,$$

gdzie

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in R$ (dowolne liczby),

F^0 - jakiekolwiek rozwiązanie RN

Przykład
Wyznaczymy rozwiązanie ogólne równania

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie.
Najpierw rozpatrujemy równanie jednorodne

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Macierz współczynników

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

postać normalna macierzy współczynników (po zastosowaniu przekształceń elementarnych) ma postać:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zatem $r = \mathrm{rz}A = 2$, $n = 5$.

podstawiamy za x_3, x_4, x_5 składowe wektora $e^1 = (1, 0, 0)$ bazy standardowej e^1, e^2, e^3, przestrzeni R^3 , obliczamy z pierwszego równania $x_1 = -0,5$ i z drugiego równania $x_2 = 0,5$ i otrzymamy rozwiązanie fundamentalne

$$F^1 = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

podstawiamy za x_3, x_4, x_5 składowe wektora $e^2 = (0, 1, 0)$ bazy standardowej e^1, e^2, e^3, przestrzeni R^3 otrzymamy rozwiązanie

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

podstawiamy za x_3, x_4, x_5 składowe wektora $e^3 = (0, 0, 1)$ bazy standardowej e^1, e^2, e^3, przestrzeni R^3 otrzymamy rozwiązanie

$$F^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dowolne rozwiązanie RJ ma postać

$$X = \lambda_1 F^1 + \lambda_2 F^2 + \lambda_3 F^3$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ (dowolne liczby)

podstawiając do równania niejednorodnego za $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ otrzymamy układ równań (trzecie równanie można pominąć):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 1 \end{cases}$$

otrzymujemy pewne rozwiązanie RN

$$F^0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zatem dowolne rozwiązanie RN ma postać

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ (dowolne liczby)

Zadania

Zadanie 1

Sprawdź czy jest przestrzenią liniową nad R (z dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez liczbę):

a) zbiór wszystkich macierzy,

b) zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}$, $a, b, c \in R$ dowolne,

c) zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix}$, $a, b, c \in R$ dowolne,

d) zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a,b \in R$ dowolne,

(odp. a) nie, b) tak, c) nie, d) tak)

Zadanie 2

Sprawdź czy następujące zbiory funkcji (z dodawaniem funkcji i mnożeniem funkcji przez liczbę), są przestrzeniami liniowymi nad R:

a) zbiór wielomianów stopnia n,
b) zbiór wszystkich wielomianów spełniających warunek $W(0) = 0$,
c) zbiór wszystkich wielomianów spełniających warunek $W(0) = 1$,
d) zbiór funkcji postaci $f(x) = ax + b$, $a,b \in R$,

(odp. a) nie, b) tak, c) nie, d) tak)

Zadanie 3

Niech $x = (-1, 2, 0, 2)$, $y = (1, -1, 4, -3)$, $x, y \in R^4$. Wyznaczyć $z = -3x + y$.

Czy elementy x, y są liniowo niezależne?

(odp. $z = (4, -7, 4, -9)$, elementy liniowo niezależne)

Zadanie 4

Dla jakiej wartości $c \in$ R wektory $x = (1,-1,2,-2)$ i $y = (-2,c,-4,4)$ $x, y \in R^4$ są liniowo zależne?

(odp. $c = 2$)

Zadanie 5

Sprawdź, że $x = (1, 2, 5)$, $y = (5, 3, 1)$, $z = (-15, -2, 21)$, $x, y, z \in R^3$ są liniowo zależne. Przedstawić wektor zerowy jako niezerową kombinację liniową tych wektorów.

(odp. $0 = 5x - 4y - z$)

Zadanie 6

Sprawdź, że $W(x) = x^2 + 5$, $P(x) = x^2 - 4x + 3$, $P(x) = x^2 + 16x + 13$, $W, P, Q \in W_2$ (przestrzeń wielomianów stopnia najwyżej 2) są liniowo zależne. Przedstawić wektor zerowy jako niezerową kombinację liniową tych wektorów.

(odp. $0 = 5W - 4P - Q$)

Zadanie 7

Sprawdź, że $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{bmatrix}$, $A, B, C \in M_{2,3}$ są liniowo zależne. Przedstawić wektor zerowy jako niezerową kombinację liniową tych wektorów.

(odp. $0 = 5A - 4B - C$)

Zadanie 8

Sprawdź, że $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \cos^2 x$, $h(x) = 1$, $f, g, h \in C[0, 1]$ są liniowo zależne. Przedstawić wektor zerowy jako niezerową kombinację liniową tych wektorów.

(odp. $0 = f + g - h$)

Zadanie 9

Sprawdź, że $W(x) = x^2 - 4x + 3$, $P(x) = 5x - 4$, $P(x) = x^2 + x + 1$, $W, P, Q \in W_2$ (przestrzeń wielomianów stopnia najwyżej 2) są liniowo niezależne.

Zadanie 10

Sprawdź, że $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A, B, C, D \in M_{2,2}$ są liniowo niezależne. Zauważ, że jest to baza przestrzeni $M_{2,2}$.

Zadanie 11

Niech $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Czy elementy x, y, z są liniowo niezależne? Czy tworzą bazę w $M_{3,1}$?
Przedstaw $u = [0, 1, 0]^T$ jako kombinację liniową x, y, z.

(odp. x, y, z tworzą bazę, $u = x + 0{,}5y - z$)

Zadanie 12

Elementy e^1, e^2, e^3 – baza standardowa w R^3. Czy elementy e^1, $e^1 + e^2$, $e^1 + e^2 + e^3$ są liniowo niezależne? Czy tworzą bazę w R^3 ?

(odp. jest to baza w R^3)

Zadanie 13

Sprawdź, że $x = (1, 1, 1)$, $y = (1, 2, 3)$, $z = (1, 4, 9)$, $x, y, z \in R^3$ tworzą bazę. Wyznaczyć współrzędne wektora $(3, 7, 13)$ w tej bazie.

(odp. (1, 1, 1))

Zadanie 14

Sprawdź, że $1 - x^4$, $x - x^4$, $x^2 - x^4$, $x^3 - x^4$, x^4 tworzą bazę przestrzeni W_4 (wielomianów stopnia najwyżej 4).

Wyznaczyć współrzędne wektora $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$ w tej bazie.

(odp. (1, –2, 3, –4))

Zadanie 15

Określ wymiar i bazę podprzestrzeni Lin(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) gdzie

$x_1 = (1, 0, 0, -1)$, $x_2 = (2, 1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 1, 1, 1)$, $x_4 = (1, 2, 3, 4)$,
$x_5 = (0, 1, 2, 3)$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in R^4$.

(odp. dimLin(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3,
przykładowa baza to x_1, x_2, x_4)

Zadanie 16

Sprawdź, że w przestrzeni W_4 (wielomianów stopnia najwyżej 4) zbiór V_1 wielomianów, które są funkcjami parzystymi i zbiór V_2 wielomianów, które są funkcjami nieparzystymi są podprzestrzeniami liniowymi w W_4.

Sprawdź, że $W_4 = V_1 \oplus V_2$.

Zadanie 17

Sprawdź, że dany podzbiór jest podprzestrzenią liniową odpowiedniej przestrzeni liniowej.

Wyznacz wymiary tych podprzestrzeni i przykładową bazę.

a) zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in R$ w $M_{2,2}$,

b) zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{bmatrix}$, $a, b, c \in R$ w $M_{3,3}$,

(odp. a) 2, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) 3, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Zadanie 18

Podaj rozwiązanie ogólne RJ.

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ -x_2 + 4x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

(odp. a) $[1, 1]^T$, b) $[0, 1, 1]^T$,
c) $[0, 5, 4, 1, 0]^T$, $[-1, -7, -4, 0, 1]^T$)