Rozdział 7
Relacje równoważności

Pojęcie relacji. Załóżmy, że dany jest niepusty zbiór A oraz własność W, którą mogą mieć niektóre elementy zbioru A. Własność W wyznacza pewien podzbiór W_A zbioru A, złożony z tych jego elementów, które mają własność W:

$$W_A = \{a \in A : a \text{ ma własność } W\}$$

Przykład 1

Niech $A = N$, liczba a ma własność W, gdy jest podzielna przez 5. Wówczas $W_A = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

Niech teraz zbiór A będzie iloczynem kartezjańskim niepustych zbiorów X i Y, tzn. $A = X \times Y$. Elementami zbioru A są więc pary uporządkowane (x, y) takie, że $x \in X$ i $y \in Y$. Własność W dotyczy par (x, y), a zbiór W_A jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. W takim przypadku własność W nazwiemy ***relacją dwuczłonową*** lub krótko: ***relacją***. Ponieważ każda własność W wyznacza jednoznacznie zbiór W_A, więc możemy przyjąć następujące określenie relacji:

Relacją w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ nazywamy każdy podzbiór tego iloczynu.

Przy omawianiu relacji zamiast mówić „para (x, y) należy do relacji $\boldsymbol{R}$” powiemy „x jest w relacji $\boldsymbol{R}$ z y”, co zapisujemy:

$$x \, \boldsymbol{R} \, y$$

Przykład 2

Niech $X = \{1, 4, 5\}$, $Y = \{2, 3\}$. W zbiorze $X \times Y$ określamy relację $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \{(x, y) : \ x + y \text{ jest liczbą nieparzystą }\}$$

Wyznaczmy najpierw zbiór $X \times Y$.

$$X \times Y = \{(1,2), (1,3), (4,2), (4,3), (5,2), (5,3)\}$$

Para $(1,2)$ należy do relacji $\boldsymbol{R}$, bo $1+2$ jest liczbą nieparzystą. Ten fakt możemy wyrazić inaczej: „1 jest w relacji z 2” i napisać $1\ \boldsymbol{R}\ 2$.
Para $(1,3)$ nie należy do relacji $\boldsymbol{R}$, bo $1+3$ jest liczbą parzystą. Ten fakt możemy wyrazić inaczej: „1 nie jest w relacji z 3” i napisać $\sim 1\ \boldsymbol{R}\ 3$.
Mamy poza tym: $\sim 4\ \boldsymbol{R} 2$, $4\ \boldsymbol{R} 3$, $5\ \boldsymbol{R} 2$, $\sim 5\ \boldsymbol{R} 3$.
Zatem: $\boldsymbol{R} = \{(1,2),\ (4,3), (5,2)\}$.

Przykład 3
Niech X będzie zbiorem miast w Polsce, zaś Y – zbiorem rzek płynących w Polsce (przynajmniej w części swego biegu). W zbiorze $X \times Y$ określamy relację $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \{(x,y):\ \text{miasto } x \text{ leży nad rzeką } y\ \}$$

Wypisanie pełnej relacji $\boldsymbol{R}$ byłoby uciążliwe, możemy natomiast orzekać, czy konkretna para (*miasto*, *rzeka*) należy do tej relacji, np.:

Warszawa $\boldsymbol{R}$ Wisła
Poznań $\boldsymbol{R}$ Warta
$\sim$ Warszawa $\boldsymbol{R}$ Warta
Sandomierz $\boldsymbol{R}$ San
Sandomierz $\boldsymbol{R}$ Wisła
$\sim$ Sandomierz $\boldsymbol{R}$ Odra
itd.

Przykład 4
Niech $X = Y = N$. W zbiorze $X \times Y$ określamy relację $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \{(x,y):\ x \mid y\}$$

(napis $x \mid y$ czytamy: y dzieli się przez x, tzn. x jest dzielnikiem y).
Wypisanie pełnej relacji $\boldsymbol{R}$ byłoby niemożliwe, możemy natomiast orzekać, czy konkretna para (x,y) należy do tej relacji, np.:
$3\ \boldsymbol{R} 6$, $5\ \boldsymbol{R} 100$, $2\ \boldsymbol{R} 4$, $2\ \boldsymbol{R} 2$, $1\ \boldsymbol{R} 7$, $\sim 3\ \boldsymbol{R} 5$, $\sim 5\ \boldsymbol{R} 3$ itd.

Uwaga. W przypadku gdy $X = Y$ będziemy mówić „relacja określona w zbiorze X” pamiętając, że jest to jedynie skrót:

w istocie taka relacja jest określona w zbiorze $X \times X$. Takie relacje będą przedmiotem naszych zainteresowań w dalszym ciągu tego rozdziału.

Relacje zwrotne. Relację określoną w zbiorze X nazywamy ***zwrotną***, gdy każdy element zbioru X jest w relacji sam ze sobą, tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x \in X} x \, \boldsymbol{R} \, x$$

Przykład 5

Niech $X = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y): \ x \mid y\}$.

Relacja $\boldsymbol{R}$ jest zwrotna, gdyż każda liczba naturalna jest swoim dzielnikiem, tzn. $\bigwedge\limits_{x \in N} x \mid x$.

Przykład 6

Niech $X = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y): \ x \le y^2\}$.

Relacja $\boldsymbol{R}$ jest zwrotna, gdyż liczba 1 jest równa swemu kwadratowi, a pozostałe liczby naturalne są mniejsze od swych kwadratów, tzn. $\bigwedge\limits_{x \in N} x \le x^2$.

Przykład 7

Niech $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y): \ x \le y^2\}$.

Relacja $\boldsymbol{R}$ nie jest zwrotna, gdyż np.

$$\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

zatem nie każda liczba rzeczywista jest w relacji $\boldsymbol{R}$ ze sobą.

Uwaga. Porównując przykłady 6 i 7 zauważamy, że relacje określone tym samym „przepisem” w różnych zbiorach mogą mieć różne własności.

Relacje symetryczne. Relację określoną w zbiorze X nazywamy ***symetryczną***, gdy dla dowolnych elementów x i y tego zbioru z faktu, że x jest w relacji z y wynika, że również y jest w relacji z x, tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}(x\,\boldsymbol{R}y \Rightarrow y\,\boldsymbol{R}x)$$

Przykład 8

Niech X będzie zbiorem wszystkich państw. W zbiorze X określamy relację $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ \text{państwo } x \text{ graniczy z państwem } y\}$$

Relacja $\boldsymbol{R}$ jest symetryczna, gdyż z faktu, że państwo x graniczy z państwem y wynika, że także państwo y graniczy z państwem x.

Przykład 9

Niech $X = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ x \mid y\}$.

Wykażemy, że relacja $\boldsymbol{R}$ nie jest symetryczna. Zaprzeczeniem zdania

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}(x\,\boldsymbol{R}y \Rightarrow y\,\boldsymbol{R}x)$$

jest zdanie

$$\bigvee_{x\in X}\bigvee_{y\in X}\sim(x\,\boldsymbol{R}y \Rightarrow y\,\boldsymbol{R}x)$$

równoważne zdaniu

$$\bigvee_{x\in X}\bigvee_{y\in X}(x\,\boldsymbol{R}y \wedge \sim y\,\boldsymbol{R}x)$$

Weźmy np. $x = 2,\ y = 4$. Mamy: $2\,\boldsymbol{R}\,4$, ale $\sim 4\,\boldsymbol{R}\,2$. Relacja $\boldsymbol{R}$ nie jest symetryczna.

Relacje przechodnie. Relację określoną w zbiorze X nazywamy ***przechodnią***, gdy dla dowolnych elementów x, y, z należących do zbioru X z faktu, że x jest w relacji z y i y jest w relacji z z wynika, że również x jest w relacji z z, tzn. gdy:

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in X}\bigwedge_{z\in X}[(x\,\boldsymbol{R}y \wedge y\,\boldsymbol{R}z) \Rightarrow x\,\boldsymbol{R}z]$$

Przykład 10

Niech $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ x < y\}$

Relacja $\boldsymbol{R}$ jest przechodnia, gdyż z faktu, że $x < y$ i $y < z$ wynika, że $x < z$ (dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z).

Przykład 11

Niech X będzie zbiorem wszystkich państw. W zbiorze X określamy relację $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ \text{państwo } x \text{ graniczy z państwem } y\}$$

Relacja $\boldsymbol{R}$ nie jest przechodnia, gdyż np. Polska graniczy z Niemcami, Niemcy graniczą z Francją, a Polska nie graniczy z Francją.

Relacje równoważności. Relację określoną w zbiorze X nazywamy ***relacją równoważności***, gdy ta relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykład 11

a) W zbiorze słów występujących jako hasła w „Słowniku języka polskiego” wprowadzamy relację:
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ \text{słowo } x \text{ zaczyna się na tę samą literę, co słowo } y\}$.
Relacja $\boldsymbol{R}$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia (sprawdź!), więc jest relacją równoważności.

b) W zbiorze słów występujących jako hasła w „Słowniku języka polskiego” wprowadzamy relację:
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ \text{słowo } x \text{ ma przynajmniej jedną wspólną literę ze słowem } y\}$.
Relacja $\boldsymbol{R}$ jest zwrotna i symetryczna (sprawdź!), lecz nie jest przechodnia (rozważ np. słowa: x = koń, y = kot, z = taca), więc nie jest relacją równoważności.

c) W zbiorze okręgów na płaszczyźnie wprowadzamy relację:
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ \text{okrąg } x \text{ ma ten sam środek, co okrąg } y\}$.
Relacja $\boldsymbol{R}$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia (sprawdź!), więc jest relacją równoważności.

d) Niech $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y):\ x \le y\}$.

Relacja $\boldsymbol{R}$ jest zwrotna i przechodnia (sprawdź!), lecz nie jest symetryczna (rozważ np. $x = 1$, $y = 2$), więc nie jest relacją równoważności.

Klasy abstrakcji relacji równoważności. Każda relacja równoważności $\boldsymbol{R}$ wyznacza naturalny podział zbioru X (w którym jest określona), na parami rozłączne podzbiory takie, że:
- każde dwa elementy należące do tego samego podzbioru są ze sobą w relacji,
- żadne dwa elementy należące do różnych podzbiorów nie są ze sobą w relacji.

Podzbiory te nazywamy ***klasami abstrakcji*** (albo ***klasami równoważności***) relacji $\boldsymbol{R}$.

Przykład 12

W zbiorze X słów występujących jako hasła w „Słowniku języka polskiego" wprowadzamy relację:

$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ słowo x zaczyna się na tę samą literę, co słowo y $\}$.

Relacja $\boldsymbol{R}$ jest relacją równoważności. Klasami abstrakcji tej relacji są zbiory słów zaczynających się na tę samą literę:

$K(a) = \{$abażur, alkohol, arbuz, atrament, ... $\}$,

$K(b) = \{$baca, biedronka, bóbr, byk, ... $\}$,

....

$K(ź) = \{$źdźbło, źrenica, źrebak, źródło, ...$\}$.

Zauważmy, że:
– suma klas abstrakcji $K(a) \cup K(b) \cup ... \cup K(ź)$ jest całym zbiorem X,
– żadne słowo nie należy do dwóch klas jednocześnie, więc klasy abstrakcji są parami rozłączne, tzn.

$$K(\alpha) \cap K(\beta) = \emptyset \quad \text{dla} \quad \alpha \ne \beta$$

– każde dwa słowa należące do tej samej klasy (a więc zaczynające się na tę samą literę) są ze sobą w relacji,
– żadne dwa słowa należące do różnych klas (a więc zaczynające się na różne litery) nie są ze sobą w relacji.

Przykład 13

Niech $X = N$,

$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ x ma w zapisie dziesiętnym tyle samo cyfr co y $\}$

Relacja $\boldsymbol{R}$ jest relacją równoważności (sprawdź!). Klasami abstrakcji tej relacji są zbiory liczb naturalnych składające się z tej samej liczby cyfr:

$K(1) = \{1, 2, 3, ..., 9\}$,

$K(2) = \{10, 11, 12, ..., 99\}$,

$K(3) = \{100, 101, 102, ..., 999\}$,

....

Klas abstrakcji jest nieskończenie wiele. Przeanalizuj samodzielnie ich własności.

Zadania

Zadanie 1

W zbiorze $X \times Y$ dana jest relacja $\boldsymbol{R}$. Wyznaczyć wszystkie pary należące do tej relacji.

a) $X = \{$las, kot, osa, sos$\}$, $Y = \{$tor, set, lek$\}$,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ słowo x ma przynajmniej jedną wspólną literę ze słowem $y\}$

b) $X = \{$las, kot, osa, sos$\}$, $Y = \{$tor, set, lek$\}$,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ słowo x zaczyna się na tę samą literę co słowo $y\}$

c) $X = \{$Paryż, Monachium, Berlin$\}$,
$Y = \{$Polska, Niemcy, Austria, Francja$\}$,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ miasto x leży w państwie $y\}$

d) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{6, 7, 8\}$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : x \mid y\}$

e) $X = Y = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 10\}$

f) $X = \{2, 5, 8, 12\}$, $Y = \{3, 4, 10\}$,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ liczba x ma z liczbą y tylko jeden wspólny dzielnik$\}$
Uwaga. Liczby naturalne x i y będące w tej relacji nazywamy liczbami względnie pierwszymi.

Zadanie 2

W zbiorze X dana jest relacja $\boldsymbol{R}$. Zbadać, czy ta relacja jest:

1) zwrotna, 2) symetryczna, 3) przechodnia, 4) relacją równoważności.

Jeżeli dana relacja jest relacją równoważności, to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.

a) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ prosta x jest równoległa do prostej $y\}$

b) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ prosta x jest prostopadła do prostej $y\}$

c) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ prosta x ma przynajmniej jeden punkt wspólny z prostą $y\}$

d) X – zbiór prostych na płaszczyźnie,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ prosta x ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą $y\}$

e) X – zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ odległość punktu x od początku układu jest równa odległości punktu y od początku układu$\}$

f) X – zbiór słów w języku polskim,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ słowo x ma tyle samo liter co słowo $y\}$

g) X – zbiór słów w języku polskim,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ słowo x ma wspólną literę ze słowem $y\}$

h) X – zbiór mieszkańców Polski,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ x jest ojcem $y\}$

i) X – zbiór mieszkańców Polski,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ x jest przodkiem $y\}$

j) X – zbiór miast w Polsce,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ miasto x leży w tym samym województwie co miasto $y\}$

k) X – zbiór wszystkich podzbiorów ustalonej płaszczyzny,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y): x \subset y\}$

l) X – zbiór funkcji kwadratowych,
$\boldsymbol{R} = \{(x, y):$ funkcja x ma tyle samo miejsc zerowych co funkcja $y\}$

m) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : x < y\}$

n) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : x \leq y\}$

o) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : |x| = |y|\}$

p) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : xy > 0\}$

q) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : xy \geq 0\}$

r) $X = R \setminus \{0\}$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : xy > 0\}$

s) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : x + y > 0\}$

t) $X = R \setminus \{0\}$, $\boldsymbol{R} = \left\{(x, y) : x = \dfrac{1}{y}\right\}$

u) $X = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : x \mid y\}$

v) $X = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : x + 1 = y\}$

w) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : | x - y | < 1\}$

x) $X = R$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : 0 \leq x - y < 1\}$

y) $X = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : xy$ jest liczbą parzystą$\}$

z) $X = N$, $\boldsymbol{R} = \{(x, y) : xy$ jest liczbą nieparzystą$\}$

Zadanie 3

W zbiorze $X = \{a, b, c, d\}$ dana jest relacja $\boldsymbol{R}$. Sprawdzić, czy ta relacja jest: 1) zwrotna, 2) symetryczna, 3) przechodnia, 4) relacją równoważności.

Jeżeli dana relacja jest relacją równoważności, to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.

a) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (a, d), (c, a), (c, d), (d, a), (d, c)\}$

b) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$

c) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}$

d) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b)\}$

e) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, d), (a, d)\}$

f) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$

g) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$

h) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

i) $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b)\}$

j) $\boldsymbol{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c)\}$

k) $\boldsymbol{R} = \{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(d,d)\}$

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

a) $\boldsymbol{R} = \{$ (las, set), (las, lek), (kot, tor), (kot, set), (kot, lek), (osa, tor), (osa, set), (sos, tor), sos, set)$\}$

b) $\boldsymbol{R} = \{$ (las, lek), (sos, set)$\}$

c) $\boldsymbol{R} = \{$ (Paryż, Francja), (Monachium, Niemcy), (Berlin, Niemcy)$\}$

d) $\boldsymbol{R} = \{(1,6),(1,7),(1,8),(2,6),(2,8),(3,6)\}$

e) $\boldsymbol{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$

f) $\boldsymbol{R} = \{(2,3),(5,3),(5,4),(8,3)\}$

Zadanie 2

polecenie	zwrotność	symetr.	przech.	rel. równ.
a)	+	+	+	+
b)	−	+	−	−
c)	+	+	−	−
d)	−	+	−	−
e)	+	+	+	+
f)	+	+	+	+
g)	+	+	−	−
h)	−	−	−	−
i)	−	−	+	−
j)	+	+	+	+
k)	+	−	+	−
l)	+	+	+	+
m)	−	−	+	−
n)	+	−	+	−
o)	+	+	+	+
p)	−	+	+	−
q)	+	+	−	−
r)	+	+	+	+
s)	−	+	−	−

polecenie	zwrotność	symetr.	przech.	rel. równ.
t)	–	+	–	–
u)	+	–	+	–
v)	–	–	–	–
w)	+	+	–	–
x)	+	–	–	–
y)	–	+	–	–
z)	–	+	+	–

Klasy abstrakcji:

a) Jest nieskończenie wiele klas, do tej samej klasy należą proste o tym samym kierunku.

e) Jest nieskończenie wiele klas, do tej samej klasy należą punkty położone na ustalonym okręgu o środku w początku układu i dowolnym promieniu. Oprócz tego jest jedna klasa jednoelementowa składająca się wyłącznie z punktu (0, 0).

f) Jedną klasę tworzą wszystkie słowa jednoliterowe, kolejną – wszystkie słowa dwuliterowe, kolejną – trzyliterowe itd.

j) Jest 16 klas, do tej samej klasy należą wszystkie miasta leżące w ustalonym województwie.

l) Są trzy klasy: do pierwszej należą wszystkie funkcje kwadratowe o wyróżniku ujemnym, do drugiej – o wyróżniku równym zero, a do trzeciej – o wyróżniku dodatnim.

o) Jest nieskończenie wiele klas, jedna z nich jest jednoelementowa: $\{ 0 \}$, a pozostałe są dwuelementowe i składają się z liczb przeciwnych np. $\{3,-3\}$, $\{\pi,-\pi\},....$

r) Są dwie klasy: do jednej należą wszystkie liczby ujemne, a do drugiej – wszystkie liczby dodatnie.

Zadanie 3

polecenie	zwrotność	symetr.	przech.	rel. równ.
a)	+	+	+	+
b)	+	+	−	−
c)	−	+	−	−
d)	+	+	+	+
e)	+	−	+	−
f)	+	+	+	+
g)	−	+	+	−
h)	+	+	+	+
i)	−	+	+	−
j)	+	−	−	−
k)	−	−	+	−

Klasy abstrakcji:

a) $K_1 = \{b\},\ K_2 = \{a, c, d\}$

d) $K_1 = \{a\},\ K_2 = \{b, c\},\ K_3 = \{d\}$

f) $K_1 = \{a, b\},\ K_2 = \{c, d\}$

h) $K_1 = \{a\},\ K_2 = \{b\},\ K_3 = \{c\},\ K_4 = \{d\}$