

## Rozdział 6

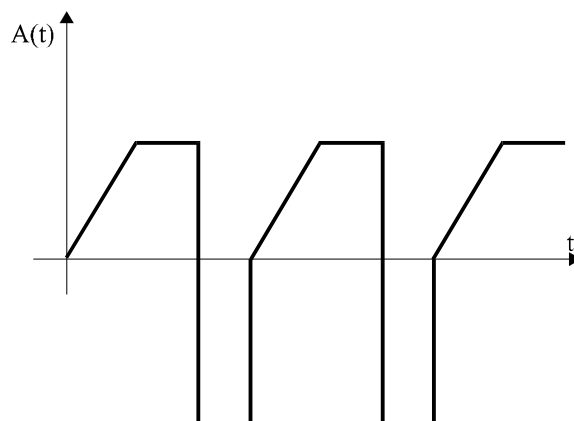
### RUCH DRGAJĄCY I FALOWY

#### 6.1. Ruch drgający harmoniczny

Ruch w przyrodzie jest zjawiskiem powszechnym. Wszystkie obserwowane w przyrodzie ruchy dzielimy na cztery klasy:

- ruch postępowy
- ruch obrotowy
- ruch drgający
- ruch falowy

Ruchem drgającym, lub wprost drganiami nazywamy dowolne zjawisko fizyczne (każdy ruch lub zmianę stanu) charakteryzujące się powtarzalnością w czasie wielkości fizycznej  $A(t)$  opisującej ten proces.



Rys.6.1. Ruch drgający okresowy

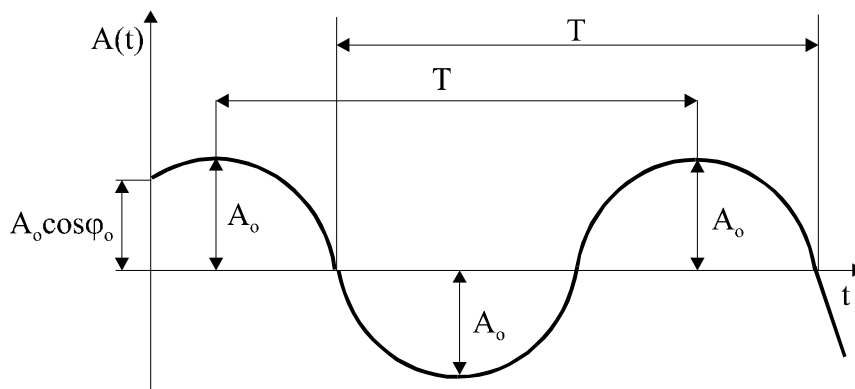
Ze względu na opisujący „drżący” parametr  $A(t)$  drżania możemy podzielić na:

- mechaniczne: zmieniają się współrzędne opisujące położenie ciała;
- elektryczne: zmienia się np. napięcie  $U(t)$  lub ładunek  $Q(t)$  na kondensatorze obwodu RLC;
- elektromagnetyczne: drżają pola elektryczne i magnetyczne. Zmieniają się wektory  $\vec{E}(t)$  i  $\vec{B}(t)$  opisujące te pola.

Wśród szerokiej klasy drżń możemy wyróżnić drżania harmoniczne.

Drżania harmoniczne to takie drżania, w których wielkość charakteryzująca dany układ zmienia się z czasem sinusoidalnie lub cosinusoidalnie.

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.1)$$



Rys.6.2. Wykres przedstawia drżania harmoniczne z fazą początkową  $\varphi_0$  różną od zera, amplitudą  $A_0$  i okresem  $T$ .

Drżania harmoniczne charakteryzuje:

1. okresowość; tzn. istnieje taki odstęp czasu  $T$ , że dla dowolnego czasu  $t$  zachodzi:

$$A(t) = A(t + T)$$

$T$  – nazywamy okresem drżń;

2. stałość maksymalnego „wychylenia”  $A_0$  zwanego amplitudą drżń;
3. Stałość okresu  $T$ .

Skoro  $T = \text{const}$ , to wielkość  $\nu = \frac{1}{T}$  określa liczbę drżń w ciągu jednostki czasu.

Wielkość  $\nu$  nosi nazwę częstości drżń i spełnia związek

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6.2)$$

gdzie:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  to częstość kątowa lub pulsacja drżń.

Częstość  $\nu$  mierzymy w hercach  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

Argument funkcji cosinus (lub sinus)

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \quad (6.3)$$

w wyrażeniu (6.1) nazywamy fazą drgań, a wielkość  $\varphi_0 = \text{const}$  fazą początkową.

Jeżeli chcemy opisać matematycznie drgania to musimy podać:

- postać funkcji  $A(t)$  albo
- równanie matematyczne – zwane równaniem ruchu, z którego funkcja  $A(t)$  może być obliczona.

## 6.2. Prędkość i przyspieszenie punktu drgającego

Pamiętamy, że

prędkość ruchu ciała  $v$  wyrażamy

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad \text{zaś}$$

przyspieszenie ruchu ciała  $a$  ma postać:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

zatem dla dowolnej wielkości  $A(t)$  prędkość punktu drgającego otrzymujemy, różniczkując funkcję (6.1) względem czasu

$$v = \frac{dA}{dt} = -A_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.4)$$

Różniczkując ponownie tę zależność względem czasu, znajdujemy przyspieszenie

$$a = \frac{dv}{dt} = -A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.5)$$

Porównując wzory (6.5) i (6.1) widzimy, że przyspieszenie jest proporcjonalne do wychylenia

$$a = -\omega^2 A(t) \quad (6.6)$$

Jak widać wzór (6.6) jest w zgodzie z wiadomościami wyniesionymi uprzednio (ze szkoły średniej), gdzie definiując ruch harmoniczny mówiono, że jest to taki ruch, w którym siła  $F(t)$  działająca na układ drgający jest wprost proporcjonalna do wychylenia i przeciwnie do tego wychylenia skierowana

$$F(t) = m \cdot a = -m\omega^2 A(t)$$

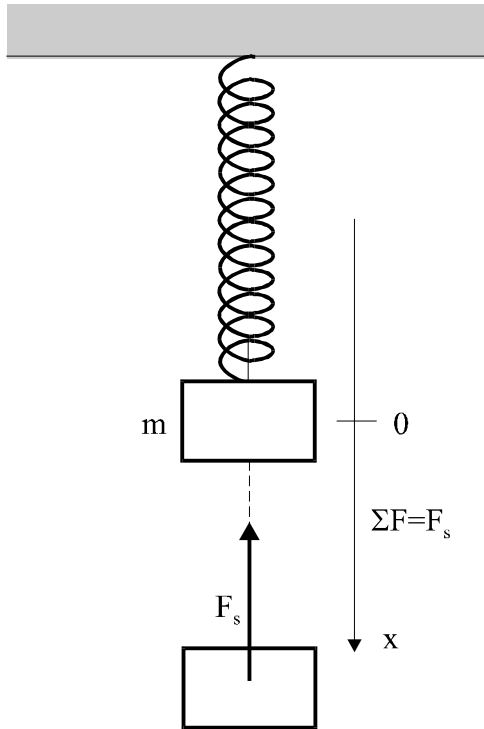
Drgania harmoniczne opisane równaniem (6.1) można także wyrazić w postaci

$$A(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1)$$

przy czym  $\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ .

### 6.3. Drgania swobodne

Niech na sprężynie będzie zaczepiona masa  $m$ , tak jak na rys.6.3.



Rys.6.3. Mechaniczny oscylator harmoniczny

Gdy wychylamy ciało o masie  $m$  z położenia równowagi  $x = 0$  o  $x$  to zgodnie z definicją siły sprężystej na układ działa siła  $F_s$ :

$$F_s = -kx \quad (6.7)$$

Siła sprężystości  $F_s$  jest proporcjonalna do wychYLENIA  $x$  i przeciwnie do niego skierowana. Współczynnik proporcjonalności  $k$  nazywany jest zwykle współczynnikiem sprężystości lub stałą siłową sprężyny. Współczynnik sprężystości ( $|k| = F/x$ ) mówi nam jaka siła jest potrzebna do wydłużenia sprężyny o jednostkę długości i ma wymiar [N/m].

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$\Sigma F = ma$$

dla oscylatora harmonicznego możemy zapisać:

$$-kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

czyli

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (6.8)$$

Oznaczając formalnie

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (6.9)$$

(6.8) przyjmie postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \quad (6.10)$$

Równanie (6.10) nosi nazwę równania ruchu drgań swobodnych punktu materialnego. Jest to równanie różniczkowe rzędu drugiego jednorodne.

Aby znaleźć funkcję  $x(t)$  opisującą drgania oscylatora swobodnego należy rozwiązać równanie (6.10).

Na podstawie rozważań prowadzonych w podrozdziale 6.1. postulujemy, że funkcja typu

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.11)$$

winna być rozwiązaniem równania ruchu (6.10).

Podstawiając (6.11) i wyrażenie (6.12)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.12)$$

obliczone z (6.11) do równania (6.10) otrzymujemy:

$$-\omega^2 A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega_0^2 A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.13)$$

Widzimy, że równość (6.13) zachodzi jeżeli

$$\omega = \omega_0$$

gdzie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.14)$$

jest częstotliwością kołową drgań własnych układu.

Jeżeli znamy stałą siłową  $k$  sprężyny i masę  $m$  ciała zawieszona na tej sprężynie, to możemy obliczyć  $\omega_0$  (okres  $T$ ) drgań własnych układu. Drgania swobodne (własne) są zatem drganiami harmonicznymi opisanymi funkcją

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (6.15)$$

Punkt materialny wykonujący drgania harmoniczne opisane (6.15) nosi nazwę oscylatora harmonicznego nietłumionego.

Amplituda  $A_0$  i faza początkowa  $\varphi_0$  drgań swobodnych (własnych) zależą od sposobu pobudzania układu drgań.

Drgania swobodne wykonują też wahadła matematyczne i fizyczne. Drgania swobodne nie muszą być wyłącznie mechaniczne, np. w obwodzie elektrycznym złożonym z indukcyjności  $L$  i pojemności  $C$  występują drgania (swobodne) elektryczne.

Jeżeli w równaniu (6.10) zastąpimy  $x(t)$  przez  $A(t)$  to uzyskamy uogólnione równanie ruchu drgań swobodnych w postaci:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -\omega_0^2 A \quad (6.16)$$

Obliczmy teraz całkowitą energię mechaniczną  $E$  drgającego harmonicznie punktu materialnego.

Energia kinetyczna  $E_k$  wyrazi się wzorem:

$$E_k = m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2, \text{ gdzie } x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (6.17)$$

Energia kinetyczna zmienia się od zera dla największego wychylenia  $x$  i osiąga wartość maksymalną  $E_{k \max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2$  dla wychylenia  $x = 0$ .

Energię potencjalną  $E_p$  drgającego punktu obliczamy, wyznaczając energię potencjalną rozciągniętej sprężyny. Energia potencjalna zgromadzona w rozciągniętej sprężynie równa się pracy  $W$  włożonej przy rozciąganiu tej sprężyny.

$$W = \int_0^x -F_s dx = \int_0^x -(-kx) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

Czyli  $E_p = W = \frac{1}{2} kx^2$ , gdzie  $x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$E_p = \frac{1}{2} k A_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Ale pamiętamy (patrz (6.14)), że

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad k = m \omega_0^2$$

Wtedy

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (6.18)$$

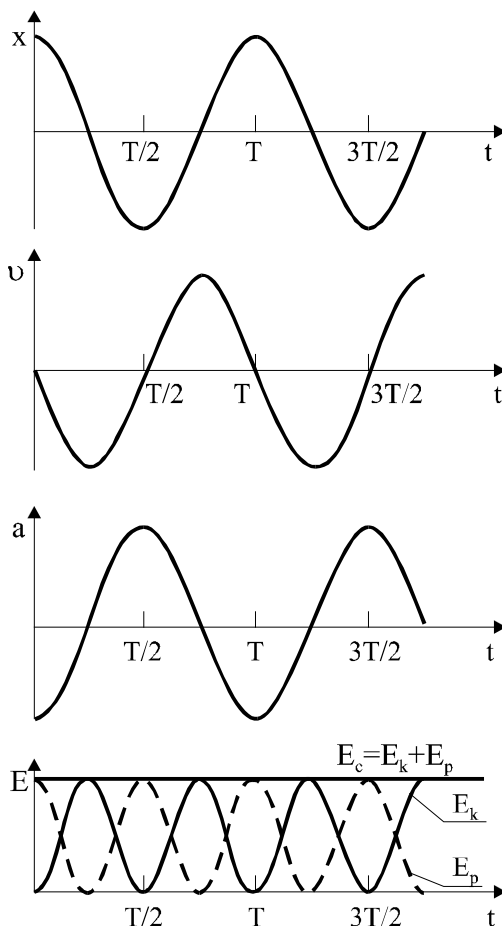
Całkowita energia mechaniczna  $E$  jest równa

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)]$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 \quad (6.19)$$

Widzimy zatem, że w ruchu harmonicznym energia potencjalna i kinetyczna punktu wykonującego drganie zmieniają się w taki sposób, że ich suma pozostaje stała. Jest to zgodne z zasadą zachowania energii mechanicznej, gdyż w przypadku drgań swobodnych straty energii mechanicznej nie występują.

Na rysunku 6.4 pokazano zależność  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$ ,  $E_k(t)$  i  $E_p(t)$  drgań swobodnych. Zwróćmy uwagę, że wykres  $v(t)$  jest przesunięty w stosunku do wykresu  $x(t)$  o  $\pi/2$ ; to samo dotyczy wykresu  $a(t)$  w stosunku do wykresu  $v(t)$ . Mówimy, że między prędkością a wychyleniem oraz między przyspieszeniem a prędkością występuje przesunięcie fazowe równe  $\pi/2$ .



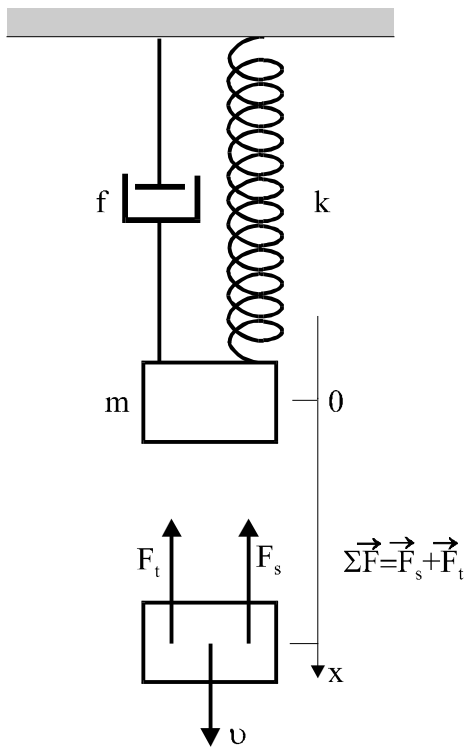
Rys.6.4. Zależność  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$ ,  $E_k(t)$  i  $E_p(t)$  w ruchu harmonicznym z zerową fazą początkową ( $\varphi_0 = 0$ )

## 6.4. Drgania tłumione

Jeżeli drgania ciała odbywają się w ośrodku materialnym (np. w gazie, cieczy), to wskutek występowania siły oporu ośrodka, którą będziemy nazywać siłą tłumiącą, drgania będą zanikać. Niezależnie od natury ośrodka siła tłumiąca  $F_t$  jest proporcjonalna do prędkości  $v$  ciała drgającego (jeśli prędkość ta jest niewielka). Zatem

$$F_t = -f \frac{dx}{dt} \quad (6.20)$$

Współczynnik proporcjonalności  $f$  nazywa się współczynnikiem oporu ośrodka. Znak minus w powyższym wzorze uwzględnia fakt, że siła  $\vec{F}_t$  jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku ruchu (kierunku prędkości).



Rys.6.5. Mechaniczny, tłumiony oscylator harmoniczny

Uwzględniając działanie siły (6.20) możemy dla drgań tłumionych, zgodnie z II zasadą dynamiki, napisać

$$\Sigma F = ma; \quad F_s + F_t = ma$$

czyli

$$-kx - f \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Albo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{f}{m} \frac{dx}{dt} \quad (6.21)$$

Pamiętając, że  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  jest to częstość kołowa drgań własnych (czyli częstość z jaką drgałby układ gdyby nie było tłumienia) oraz oznaczając formalnie

$$\frac{f}{m} = 2\beta \quad (6.22)$$

równanie (6.21) przyjmie postać

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt} \quad (6.23)$$

Równanie (6.23) nosi nazwę równania ruchu drgań harmonicznym tłumionym. Jest to równanie różniczkowe rzędu drugiego, jednorodne.



Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (6.24)$$

gdzie:  $\beta = \frac{f}{2m}$  to tzw. współczynnik tłumienia, a  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  to pulsacja drgań tłumionych.

Porównując wzór (6.9) dla drgań swobodnych ze wzorem (6.24) widzimy, że wskutek działania siły tłumiącej:

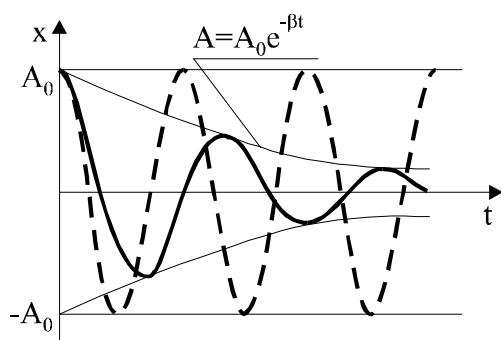
1. amplituda drgań tłumionych maleje z upływem czasu według zależności

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (6.25)$$

2. pulsacja drgań tłumionych jest mniejsza niż dla drgań swobodnych

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0 \quad (6.26)$$

Na rysunku 6.6 przedstawiono wykres drgań tłumionych ciała z naniesionym dla porównania z wykresem drgań swobodnych tego ciała.



Rys. 6.6. Porównanie drgań tłumionych (linia ciągła) z drganiami swobodnymi (linia przerywana); okres drgań tłumionych jest większy niż okres drgań swobodnych.

Wielkością charakteryzującą drgania tłumione jest tzw. logarytmiczny dekrement tłumienia.

**Logarytmiczny dekrement tłumienia** jest to logarytm naturalny stosunku dwóch amplitud w chwilach  $t$  i  $t+T$ . Oznaczając logarytmiczny dekrement tłumienia literą  $\lambda$  (lambda) możemy zapisać

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad (6.27)$$

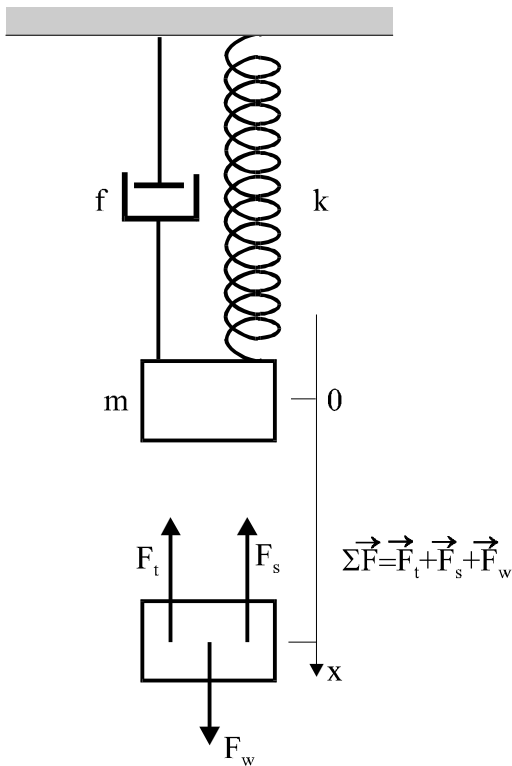
Zależności od (6.24) do (6.27) mają sens tylko wtedy, jeśli  $\beta < \omega_0$ , w przeciwnym razie ruch nie jest ruchem drgającym, lecz ruchem pełzającym (aperiodycznym).

## 6.5. Drgania wymuszone

Jeżeli chcemy, aby opory ośrodka nie tłumily drgań, to na drgający punkt materialny należy działa odpowiednio zmienną w czasie siłą. W przypadku drgań harmoniczych siła ta ma postać:

$$F_w = F_0 \cos \Omega t \quad (6.28)$$

Siłę tę nazywamy siłą wymuszającą.



Rys.6.7. Mechaniczny, tłumiony oscylator harmoniczny z wymuszeniem  $F_w$

W przypadku drgań wymuszonych mamy

$$\Sigma F = ma; \quad F_s + F_t + F_w = ma$$

czyli

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \Omega t \quad (6.29)$$

Albo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x - \frac{f}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

Co można zapisać:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt} + p_0 \cos \Omega t \quad (6.30)$$

gdzie  $p_0 = \frac{F_0}{m}$  jest amplitudą znormalizowaną siły wymuszającej (przeliczoną na jednostkę masy).

Równanie (6.30) nosi nazwę równania ruchu drgań wymuszonych.

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$x = A_0 \cos(\Omega t + \Phi_0) \quad (6.31)$$

gdzie amplituda  $A_0$  i faza początkowa  $\Phi_0$  ustalonego drgania wymuszonego mają postać:

$$A_0 = \frac{p_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (6.32)$$

$$\Phi_0 = \arctg \left( -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) \quad (6.33)$$

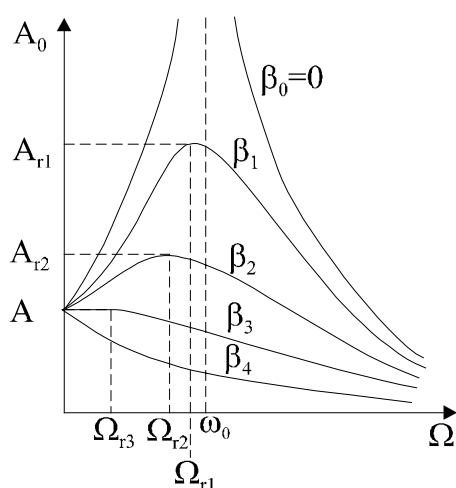
Widzimy więc, że w wyniku działania siły wymuszającej o postaci (6.28) punkt materialny wykonuje drgania harmoniczne z pulsacją  $\Omega$ , tzn. z taką pulsacją, z jaką zmienia się siła wymuszająca. Amplituda drgań wymuszonych jest ściśle określona i zależy od amplitudy siły wymuszającej  $p_0$  oraz od jej pulsacji  $\Omega$ . Również początkowa faza drgania  $\Phi_0$  zależy od pulsacji  $\Omega$ .

Gdy siła wymuszająca działa na drgające ciało z odpowiednią częstotliwością, to amplituda drgań tego ciała może osiągnąć bardzo dużą wielkość nawet przy niewielkiej sile wymuszającej. Zjawisko to nazywamy rezonansem. Przeanalizujemy obecnie wyrażenie (6.32) na amplitudę  $A_0(\Omega)$  drgań wymuszonych.

Wykres przedstawiający funkcję  $A_0(\Omega)$  nazywamy krzywą rezonansu. Na rysunku 6.8 przedstawiono krzywe rezonansu dla różnych wartości współczynnika tłumienia  $\beta$ .

Z rysunku tego wynikają następujące wnioski:

1. Maksymalna wartość amplitudy  $A_r$  jest tym większa, im mniejszy jest współczynnik tłumienia  $\beta$ , a gdy  $\beta \rightarrow 0$ , to  $A_r \rightarrow \infty$  (patrz  $\beta_0$  na rys.6.8).
2. Jeżeli tłumienie jest słabe ( $\beta_1$  i  $\beta_2$  na rys.6.8) To  $A_r$  osiąga maksimum, gdy pulsacja  $\Omega$  przyjmie wartości  $\Omega_{r1}, \Omega_{r2}$  nieco mniejsze od pulsacji drgań własnych  $\omega_0$ . Im mniejsza jest wartość  $\beta$ , tym bardziej  $\Omega_r$  zbliża się do wartości  $\omega_0$ .
3. Przy bardzo silnym tłumieniu ( $\beta_3$  i  $\beta_4$  na rys.6.8) rezonans (maksimum) nie występuje; maksymalna amplituda drgań  $A_r$  jest osiągana, gdy  $\Omega$  jest bliskie zera.



Rys.6.8. Krzywe rezonansowe dla różnych wartości współczynnika tłumienia  $\beta$ :

$$\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$$

Wartość pulsacji siły wymuszającej  $\Omega_r$ , dla której amplituda drgań jest maksymalna, nazywa się pulsacją rezonansową. Odpowiadająca jej amplituda  $A_r$  nazywa się amplitudą rezonansową.

Wyrażenia na  $A_r$  i  $\Omega_r$  można otrzymać ze wzoru (6.32). Amplituda przyjmuje wartość maksymalną, gdy wielomian pod pierwiastkiem osiąga minimum.

Obliczając jego pochodną względem  $\Omega$  i przyrównując ją do zera, znajdujemy

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (6.34)$$

Podstawiając (6.34) do (6.32), otrzymujemy

$$A_r = \frac{P_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (6.35)$$

Zjawisko rezonansu jest bardzo rozpowszechnione w przyrodzie i technice. Skutki rezonansu mogą być pozytywne lub negatywne. Na przykład, wirujące części maszyny, jeżeli nie są dokładnie wyważone, wymuszają drgania innych części maszyny i jeżeli jest spełniony przy tym warunek rezonansu, to amplituda drgań wymuszonych może być taka duża, że doprowadzi to do zniszczenia drgających części. Ze zjawiskiem rezonansu spotykamy się jadąc np. autobusem: przy pewnej prędkości obrotów silnika szyby lub niektóre części karoserii zaczynają silnie drgać.

## 6.6. Dodawanie drgań harmoniczných równoległych o tej samej częstotliwości

Rozważmy teraz przypadek, gdy punkt materialny wykonuje jednocześnie dwa (lub więcej) drgania harmoniczne równoległe o tej samej częstotliwości kołowej, czyli o tej samej pulsacji, lecz różniące się fazą. Drgania nazywamy równoległymi, gdy zachodzą wzdłuż tej samej prostej. Załóżmy, że rozważane przez nas drgania zachodzą wzdłuż osi  $x$ . Możemy je wtedy wyrazić równaniami

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (6.36)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (6.37)$$

przy czym występująca między drganiami różnica faz  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , nosi nazwę przesunięcia fazowego.

Drganie wypadkowe rozważanego punktu jest superpozycją jego drgań składowych, a wychylenie wypadkowe jest sumą jego wychyleń składowych, zatem

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Stosując odpowiednie wzory trygonometryczne, wyrażenie powyższe można sprowadzić do postaci

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.38)$$

gdzie

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (6.39)$$

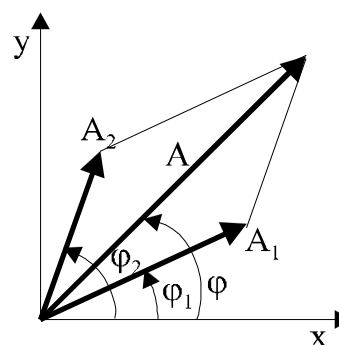
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (6.40)$$

Widzimy, że złożenie dwóch drgań harmoniczych o jednakowych pulsacjach różniących się fazą daje w wyniku drganie o tej samej pulsacji. Jasne jest, że to samo dotyczy złożenia większej liczby drgań.

Konkludując możemy stwierdzić, że dodawanie drgań harmoniczych równoległych, o jednakowych pulsacjach różniących się fazą, daje w wyniku drganie harmoniczne o tej samej pulsacji.

Składanie drgań można wykonać graficznie metodą wektorową. W metodzie tej każde drganie jest przedstawione wektorem o długości  $A_k$ , tworzącym kąt  $\varphi_k$  z osią x. Na rysunku 6.9 przedstawiono graficznie złożenie dwóch drgań. Na podstawie tego rysunku łatwo jest otrzymać wzory (6.39) i (6.40).

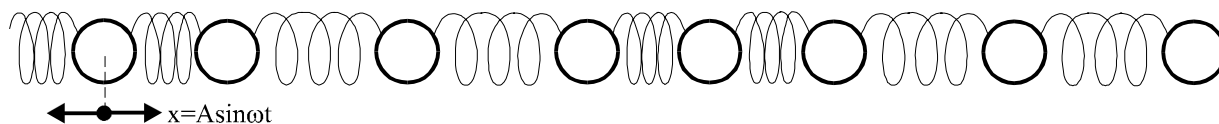
Rys.6.9. Wektorowa metoda składania drgań. Drgania składowe o amplitudach  $A_1$  i  $A_2$  oraz fazach  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  dają wypadkowe drganie o amplitudzie  $A$  i fazie  $\varphi$ .



## 6.7. Istota ruchu falowego

Większość wiadomości, jakie mamy o świecie zewnętrznym, dociera do naszej świadomości poprzez organa zmysłowe słuchu i wzroku za pośrednictwem fal. Informacje te dochodzą do obserwatora z pewnym opóźnieniem wynikającym ze skończonej prędkości światła i dźwięku.

Rozpatrzmy teraz sytuację, w której drgająca cząstka jest połączona poprzez siły sprężyste z innymi cząstkami (rys.6.10). Wskutek działania między cząstkami sił sprężystych drgania będą przenosiły się od jednej cząstki do drugiej.



Rys.6.10. Schematyczne przedstawienie propagacji fali w ciele stałym.

Z podobną sytuacją spotykamy się w ciałach stałych i gazach. Jako przykład rozpatrzmy gaz. Jeśli w pewnym miejscu sprężymy gaz, np. na skutek ruchu tłoka, to w obszarze tym znajdzie się więcej cząstek. Spowoduje to wzrost ciśnienia gazu i pojawienie się siły skierowanej w kierunku mniejszego ciśnienia (gęstości). Na skutek tego, tam gdzie gaz był zgęszczony, teraz ulegnie rozrzedzeniu i odwrotnie. Jeśli tłok będzie wykonywał ruch drgający, to w gazie będą rozprzestrzeniały się kolejne zgęszczenia i rozrzedzenia ośrodka.

Omówione tutaj drgania sprężyste rozchodzące się w gazach, cieczach i ciałach stałych nazywamy falami sprężystymi. Fale sprężyste nazywamy też często falami akustycznymi, rozumiejąc przez ten termin fale sprężyste propagujące się we wszystkich stanach skupienia materii, w pełnym zakresie częstości drgań, jaki może wystąpić w przyrodzie.

Okazuje się, że proces przekazywania drgań z jednego punktu do drugiego jest zjawiskiem charakterystycznym nie tylko dla ośrodków sprężystych, ale również dla pola elektromagnetycznego. Drgania pola elektromagnetycznego wytwarzają falę elektromagnetyczną. W tym przypadku zmieniającymi się wielkościami są pola: elektryczne i magnetyczne. Charakterystyczną cechą takiego zaburzenia jest fakt, że może ono propagować się również w próżni.

Na podstawie licznych obserwacji fizycznych możemy powiedzieć, że fale to nic innego jak rozchodzące się w przestrzeni zaburzenia stanu materii lub pola. Wspólną cechą wszystkich zjawisk falowych jest zdolność przenoszenia przez falę energii, przy czym w procesie tym występuje w sposób ciągły okresowa zamiana energii jednego rodzaju na drugi rodzaj. Np. w przypadku fal sprężystych mamy ciągłą zamianę energii kinetycznej cząstek materii na energię potencjalną, a w przypadku fal elektromagnetycznych energia pola elektrycznego przechodzi w energię pola magnetycznego i na odwrót.

## 6.8. Funkcja falowa. Rodzaje fal

Wiemy już, że ruch falowy polega na rozchodzeniu się zaburzenia pewnej wielkości fizycznej charakteryzującej stan ośrodka. Do opisu tego zaburzenia będziemy posługiwać się wielkością  $\psi$ , która zależeć będzie od położenia i czasu.

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \quad (6.41)$$

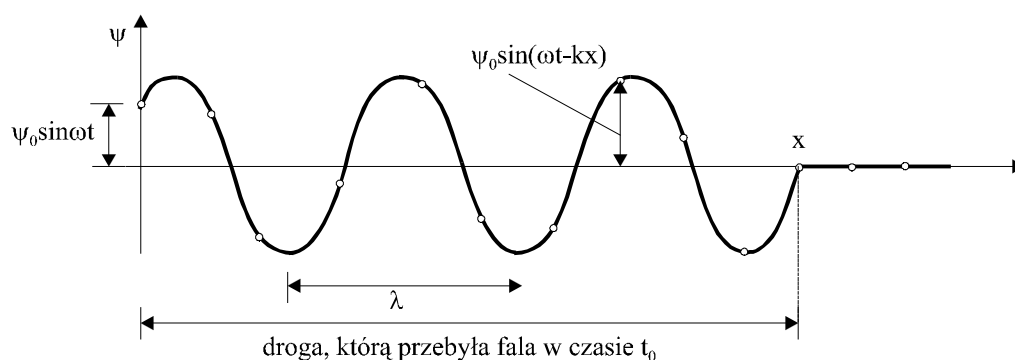
Funkcja  $\psi(x, y, z, t)$  to funkcja falowa opisująca rozchodzącą się w ośrodku falę.

W przypadku propagacji fali w cieczy lub gazie  $\psi$  będzie opisywało zmiany gęstości lub ciśnienia w ośrodku spowodowane przejściem fali. W przypadku ciał stałych  $\psi$  będzie przemieszczeniem atomów z położenia równowagi. Dla fali elektromagnetycznej jako funkcję  $\psi$  przyjmuje się natężenie pola elektrycznego lub magnetycznego.

Jeśli funkcja  $\psi$  jest skalarem, to odpowiednia fala nazywa się skalarną, jeśli jest wektorem, to mówimy o fali wektorowej. Przykładem fali skalarnej jest fala akustyczna w gazie, natomiast fali wektorowej – fala elektromagnetyczna.

Zajmiemy się najpierw opisem takiej fali, dla której  $\psi$  zależy tylko od jednej współrzędnej  $x$  i od czasu  $t$

$$\psi = \psi(x, t) \quad (6.42)$$



Rys.6.11. Ilustracja do wyprowadzenia zależności  $\psi = \psi_0 \sin(\omega t - kx)$

Falę taką nazywamy falą płaską. Dobrym przykładem fali płaskiej może być fala akustyczna wytworzona przez tłok o dużej średnicy drgający w kierunku prostopadłym do swojej płaszczyzny.

Znajdziemy teraz postać funkcji falowej  $\psi$  fali płaskiej. Załóżmy, że źródło fali wykonuje ruch harmoniczny wokół punktu  $x=0$  oraz, że w chwili początkowej  $\psi=0$  (rys.6.11). Możemy więc zapisać

$$\psi = \psi_0 \sin \omega t \quad (6.42)$$

gdzie  $\omega$  i  $\psi_0$  są odpowiednio częstością i amplitudą drgań. Zaburzenie ośrodka wywołane ruchem tłoka przemieści się w przestrzeni i po czasie  $t_0$  znajdzie się w punkcie o współrzędnej  $x$ . Drgania w tym punkcie będą opóźnione w stosunku do drgań źródła o

wielkość  $\Delta\varphi = \omega t_0$ . Przyjmując, że amplituda drgań nie zmienia się, funkcja  $\psi(x,t)$  będzie miała postać

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin \omega(t - t_0) \quad (6.43)$$

$t_0$  możemy zapisać w postaci

$$t_0 = \frac{x}{v} \quad (6.44)$$

gdzie  $v$  jest prędkością rozchodzenia się (propagacji) fali, a ściślej prędkością przemieszczania się określonej fazy fali, czyli prędkością fazową.

Prędkość fazową będziemy nazywali dalej prędkością fali. Uwzględniając więc (6.44), zależność (6.43) będzie miała postać

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \psi_0 \sin \left( \omega t - \omega \frac{x}{v} \right) \quad (6.45)$$

Ponieważ  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , więc

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{T} \frac{x}{v} \right) = \psi_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (6.46)$$

gdzie  $\lambda = vT$  jest długością fali, czyli odległością, na jaką przemieści się zaburzenie w czasie jednego okresu  $T$ . Wprowadźmy jeszcze pojęcie liczby falowej  $k$  zdefiniowanej jako

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Zatem równanie (6.46) przyjmie postać

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx) \quad (6.47)$$

Zależności (6.45-6.47) przedstawiają funkcje fali płaskiej. Argument funkcji sinus nazywamy fazą fali.

Zbiór punktów w przestrzeni, w których faza ma taką samą wartość, nazywamy powierzchnią falową lub czołem fali. Dla fali płaskiej określonej wzorem (6.47) powierzchniami falowymi będą płaszczyzny  $x = \text{const}$  (rys.6.12). Powierzchni falowych jest nieskończenie wiele. Zauważmy, że z warunku stałości fazy możemy wyznaczyć wyprowadzoną wcześniej prędkość fazową, a mianowicie

$$\omega t - kx = \text{const} \quad (6.48)$$

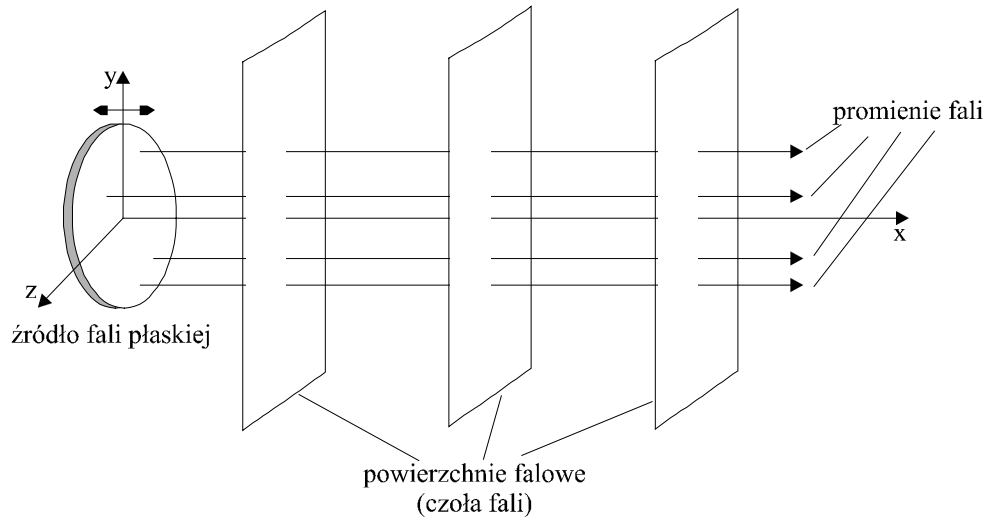
lub

$$x = -\frac{\text{const}}{k} + \frac{\omega}{k} \cdot t \quad (6.49)$$



Stąd

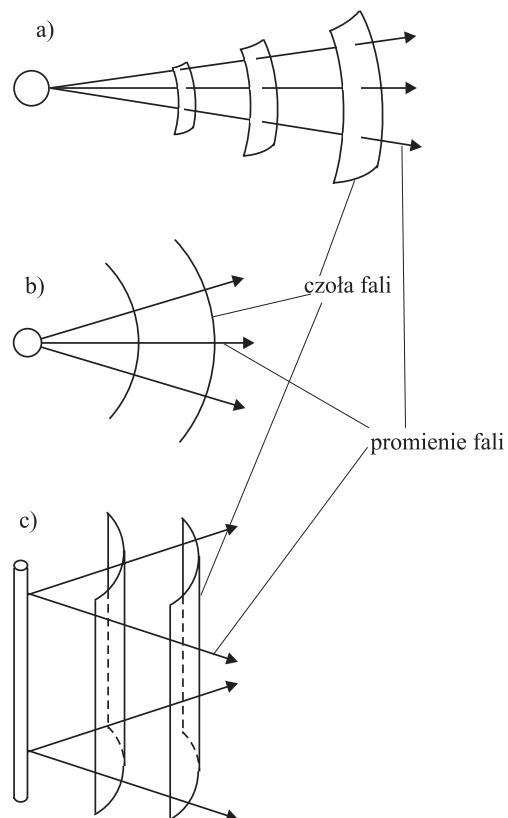
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} \quad (6.50)$$



Rys.6.12 Fala płaska

Linie, które w każdym punkcie są prostopadłe do powierzchni falowej, nazywamy promieniami fali. Wskazują one kierunek propagacji fali. W przypadku rozpatrywanej fali płaskiej, danej wzorem (6.47), są to linie równoległe do osi x i zorientowane tak jak oś x.

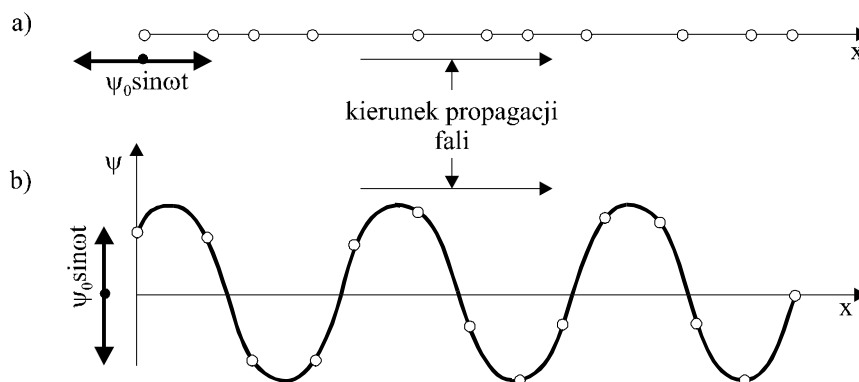
Oprócz fal płaskich wyróżniamy jeszcze (ze względu na kształt czoła fali) fale kuliste, koliste i walcowe (rys.6.13). Fale kuliste i koliste pochodzą od źródeł punktowych, zaś fale walcowe od źródeł liniowych.



Rys.6.13. Fala kulista (a), kolista (b) i walcowa (c)

Dotychczas mówiliśmy o zależności przestrzenno-czasowej funkcji  $\psi$  opisującej zaburzenie ośrodka, natomiast nie określiliśmy, jaki jest kierunek przemieszczenia się zaburzenia czy drgań cząstek ośrodka.

W związku z kierunkiem, w jakim odbywają się drgania, fale dzielimy na:  
 podłużne – gdy kierunek drgań jest równoległy do kierunku propagacji fali,  
 poprzeczne – gdy kierunek drgań jest prostopadły do kierunku propagacji fali (rys.6.14).



Rys.6.14. Fala podłużna (a) i poprzeczna (b)

Podłużne fale sprężyste mogą propagować się w cieczech i ciałach stałych. Natomiast fale poprzeczne sprężyste, których propagacja powoduje zmianę kształtu ośrodka mogą propagować się tylko w ośrodkach mających sprężystość postaci, czyli w ciałach stałych.

## 6.9 Równanie różniczkowe ruchu falowego

Funkcja  $\psi(x,t)$  (6.47) opisująca zaburzenia wywołane przejściem fali spełnia pewne równanie, które nazywamy różniczkowym równaniem ruchu fali. Aby znaleźć postać tego równania, obliczamy drugie pochodne funkcji  $\psi(x,t)$  względem  $t$  oraz względem  $x$ .

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi_0 \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 \psi \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi_0 \sin(\omega t - kx) = -k^2 \psi \quad (6.52)$$

Mnożąc obustronnie równanie (6.51) przez  $k^2$ , natomiast (6.52) przez  $\omega^2$ , możemy porównać lewe strony tych równań

$$\omega^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6.53)$$

Ponieważ (patrz 6.50))  $\frac{\omega}{k} = v$ , więc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6.54)$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu fali płaskiej propagującej się wzdłuż osi  $x$  z prędkością fazową  $v$ . Rozwiązaniami równania (6.54) są omawiane już wcześniej funkcje falowe (6.47). Czyli, znając postać równania ruchu falowego danego rodzaju, jesteśmy w stanie (rozwiązując równanie ruchu) wyznaczyć funkcje falowe  $\psi$  opisujące rozchodzenie się danego rodzaju fali w danym ośrodku. Jeżeli  $\psi_1$  i  $\psi_2$  są rozwiązaniami różniczkowego równania fali to funkcja  $\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2$ , gdzie  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są dowolnymi stałymi, jest także rozwiązaniem równania fali, a więc  $\psi$  reprezentuje również falę, która może rozchodzić się w tym ośrodku. Fakt ten nosi nazwę zasady superpozycji, którą można sformułować następująco. Jeśli w ośrodku propagują się dwie fale, to wypadkowe zaburzenia ośrodka jest równe sumie zaburzeń wywołanych przez poszczególne fale.

## 6.10. Interferencja fal

Interferencją fal nazywamy zjawisko nakładania się (superpozycji) dwóch lub więcej fal o tych samych długościach, a więc o tych samych pulsacjach.

Rozważmy dwie fale biegnące z taką samą prędkością w tym samym kierunku o równych amplitudach, lecz o różniących się fazach. Niech równania tych fal mają postać

$$\psi_1 = \psi_0 \sin(\omega t - kx) = \psi_0 \sin \phi_1 \quad (6.55)$$

$$\psi_2 = \psi_0 \sin(\omega t - kx + \varphi) = \psi_0 \sin \phi_2 \quad (6.56)$$

W danym punkcie przestrzeni fale te wywołują drgania równoległe o różnicy faz  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \varphi$ .

Wypadkowe drgania można wyrazić równaniem

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 \sin \phi_1 + \psi_0 \sin \phi_2 \\ \psi &= \psi_0 (\sin \phi_1 + \sin \phi_2) = 2\psi_0 \sin \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ \psi &= 2\psi_0 \sin \left( \omega t - kx + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( -\frac{\varphi}{2} \right) \\ \psi &= A \sin \left( \omega t - kx + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.57)$$

gdzie  $A = 2\psi_0 \cos \frac{\varphi}{2}$ .

Fala wypadkowa  $\psi$  dana równaniem (6.57) ma więc tę samą pulsację  $\omega$  co fale składowe  $\psi_1$  i  $\psi_2$  ale inną amplitudę  $A$ , równą  $2\psi_0 \cos \frac{\varphi}{2}$ . Gdy fazy fal są zgodne (tzn.  $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ), to amplituda fali wypadkowej wynosi  $2A$ ; mówimy wówczas, że fale się wzmacniają. Gdy fazy fal są przeciwne (tzn.  $\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ ), to amplituda fali wypadkowej jest równa zero; mówimy wówczas, że fale się wygłuszają.

Warunkiem koniecznym wystąpienia interferencji fal, jest to, aby różnica faz fal nakładających się była stała w czasie. Takie fale noszą nazwę koherentnych albo spójnych. Fale pochodzące z dwóch niezależnych źródeł na ogół nie są spójne. Fale spójne przesunięte w fazie można otrzymać z jednego źródła, jeżeli fale te będą przebywały niejednakowe drogi.

## 6.11. Fale stojące

Fala wytworzona w ciele o skończonych rozmiarach odbija się od granicy tego ciała: np. fala wytworzona na napiętej strunie odbija się od obu punktów unieruchomienia struny. Fala odbita porusza się w kierunku przeciwnym niż fala padająca i superpozycja tych dwóch fal (fali padającej i odbitej) daje w wyniku falę wypadkową, zwaną falą stojącą.

Założmy, że rozchodząca się w ciele fala jest falą harmoniczną i że odbija się ona od granic tego ciała bez strat, tzn. fala odbita ma taką samą amplitudę, co fala padająca. Fale te można opisać równaniami:

$$\psi_1(x, t) = \psi_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) - \text{fala biegnie w kierunku dodatnim } 0x \text{ i}$$

$$\psi_2(x, t) = \psi_0 \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) - \text{fala biegnie w kierunku ujemnym osi } 0x.$$

Stąd fala wypadkowa  $\psi(x, t)$  ma postać

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t); \\ \psi(x, t) &= \psi_0 \left[ \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \sin \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \right]; \\ \psi(x, t) &= \psi_0 \cdot 2 \sin \omega t \cos \left( -\omega \frac{x}{v} \right); \\ \psi(x, t) &= 2\psi_0 \cos \left( \omega \frac{x}{v} \right) \cdot \sin \omega t \end{aligned} \tag{6.58}$$

Jest to równanie fali stojącej.

Równanie fali stojącej o postaci (6.58) możemy zapisać

$$\psi(x, t) = A(x) \cdot \sin \omega t \tag{6.59}$$

gdzie amplituda

$$A(x) = 2\psi_0 \cos \left( \omega \frac{x}{v} \right) \tag{6.60}$$

W przypadku fali stojącej wszystkie cząstki ośrodka (np. struny) wykonują drgania harmoniczne w tej samej fazie. W fali biegnącej (czyli fali o funkcji falowej danej równaniem (6.45) lub (6.47)) amplitudy cząstek drgających są jednakowe, dla fali stojącej natomiast charakterystyczne jest to, że amplitudy drgań cząstek zależą od ich położenia. Ze wzoru (6.59) można wywnioskować, że amplituda drgań, dana wyrażeniem (6.60), przybiera wartość maksymalną  $2\psi_0$  w punktach, w których

$$\omega \frac{x}{v} = kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

a wartość minimalną (równą zero) w punktach, w których

$$\omega \frac{x}{v} = kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Punkty o maksymalnej amplitudzie drgań są nazywane strzałkami, a punkty w których amplituda drgań jest równa zero, czyli punkty nie wykonujące drgań, są nazywane węzłami.

Ponieważ zachodzi związek  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , strzałki znajdują się w punktach

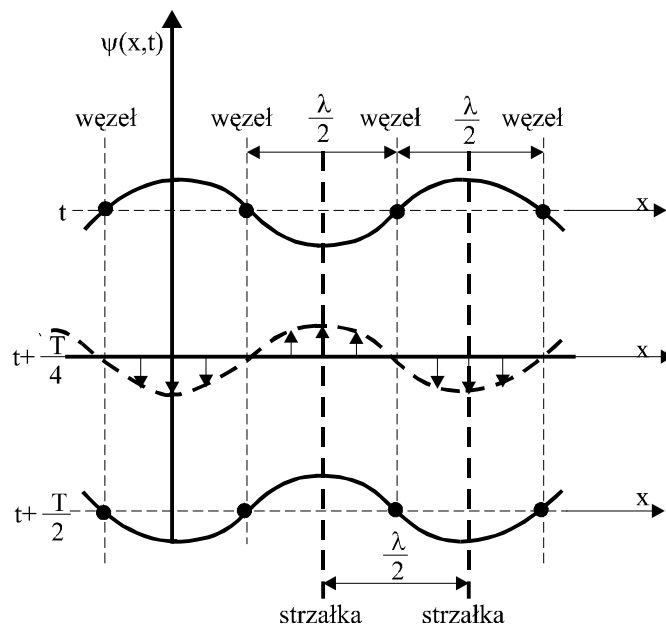
$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

a węzły w punktach

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$$

Widać stąd, że węzły i strzałki są położone na przemian oraz, że odległości między kolejnymi węzłami lub kolejnymi strzałkami wynoszą pół długości fali.

Zależności te przedstawiono na rys.6.15.



Rys.6.15. Fala stojąca przedstawiona w postaci szeregu „chwilowych fotografii” wychYLENIA punktów z położenia równowagi dla trzech chwil:  $t, t + \frac{T}{4}$  i  $t + \frac{T}{2}$ . Dla chwili  $t + \frac{T}{4}$  (dla której wszystkie punkty mają zerowe wychYLENIE), strzałkami oznaczono prędkości cząstek.

Fala stojąca jest szczególnym przypadkiem fali, takiej, w której energia drgań nie jest przenoszona, lecz trwale zmagazynowana w poszczególnych punktach ośrodka. Ruch taki można rozpatrywać jako drganie ośrodka jako całości. Nazywamy go jednak falą stojącą, ponieważ powstaje w wyniku nałożenia się dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach.

Odbicie fali od granicy ośrodka może zachodzić dwojako: ze zmianą fazy i bez zmiany fazy. Np. gdy koniec struny jest unieruchomiony, przy odbiciu fali jej faza zmienia się skokowo o  $\pi$ . Fale padająca i odbita znoszą się wzajemnie w tym punkcie i w miejscu zamocowania powstaje węzeł. Odmiennie wygląda sprawa w przypadku, gdy koniec struny jest swobodny, np. zakończony pierścieniem mogącym przesuwać się na poprzecznie umieszczonym pręcie. W tym przypadku odbicie fali następuje bez zmiany fazy i na końcu struny powstaje strzałka.