Rozdział 2

Jednowymiarowe zmienne losowe

2.1. Zmienna losowa i jej rozkład

Definicja 2.1. Najmniejszą σ-algebrę podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zawierającą przedziały $(-\infty, x\rangle$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, nazywamy *rodziną zbiorów borelowskich* na prostej i oznaczamy symbolem $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiorami borelowskimi są przedziały

$$(a, b\rangle = (-\infty, b\rangle - (-\infty, a\rangle .$$

Ponieważ każdy przedział otwarty (domknięty) można przedstawić w postaci przeliczalnej sumy (iloczynu) przedziałów $(a, b\rangle$, więc każdy przedział otwarty (domknięty) jest również zbiorem borelowskim. Wynika stąd w szczególności, że dowolny zbiór jednopunktowy jest zbiorem borelowskim, a w konsekwencji i każdy zbiór przeliczalny jest także zbiorem borelowskim.

Wszystkie podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, które będziemy rozpatrywali w tym skrypcie będą zbiorami borelowskimi. Istnieją także zbiory, które nie są borelowskie; przykłady takich zbiorów można podać korzystając z przyjętego w teorii mnogości pewnika wyboru.

Pojęcie rodziny zbiorów borelowskich pozwala sprecyzować określenie prawdopodobieństwa geometrycznego. Zakładamy, że $\Omega \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem borelowskim. Za rodzinę zdarzeń losowych $\mathfrak{M}$ przyjmujemy rodzinę $\mathfrak{B}(\Omega)$ zawierającą zbiory postaci $B \cap \Omega$, gdzie $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Prawdopodobieństwo P definiujemy wzorem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, gdzie $|\cdot|$ oznacza jednowymiarową miarę Lebesgue'a. Podobnie, korzystając z pojęcia zbiorów borelowskich w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (por. rozdział 3) i n-wymiarowej miary Lebesgue'a $|\cdot|_n$, określamy prawdopodobieństwo geometryczne, gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definicja 2.2. Niech $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *jednowymiarową zmienną losową* wtedy i tylko wtedy, gdy $X^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ dla każdego $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Warunek podany w definicji 2.2 oznacza, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ zbiór $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ jest zdarzeniem losowym, można zatem obliczyć jego prawdopodobieństwo. W szczególności można dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wyznaczyć prawdopodobieństwa zdarzeń $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$ oraz $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$. Jeśli rodzina zdarzeń losowych składa się ze wszystkich podzbiorów zbioru Ω, to każda funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest oczywiście zmienną losową. Niezbyt precyzyjnie, zmienną losową nazywamy wtedy funkcję, która przyjmuje różne wartości w zależności od przypadku.

Definicja 2.3. *Rozkładem prawdopodobieństwa* zmiennej losowej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $P_X : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ określoną dla dowolnego $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ wzorem $P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$.

Łatwo można sprawdzić, że funkcja P_X spełnia aksjomaty definicji 1.11, jest ona zatem prawdopodobieństwem określonym na σ-algebrze podzbiorów borelowskich prostej. Oznacza to, że każda zmienna losowa $X : \Omega \to \mathbb{R}$ generuje nową przestrzeń probabilistyczną $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), P_X)$.

Przykład 2.4. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych orłów w dwukrotnym rzucie monetą symetryczną. Wykażemy, że X jest zmienną losową i wyznaczymy jej rozkład.

Rozwiązanie. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest

$$\Omega = \{(O,O),(O,R),(R,O),(R,R)\},$$

zdarzeniami losowymi są wszystkie podzbiory zbioru Ω. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A określone jest wzorem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$. Funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ przyjmuje wartości:

$$X((O,O)) = 2,\ X((O,R)) = 1,\ X((R,O)) = 1,\ X((R,R)) = 0.$$

Łatwo można sprawdzić, że dla dowolnego zbioru borelowskiego B zbiór $X^{-1}(B)$ jest zdarzeniem losowym. Rozkład P_X określony jest następująco

$$P_X(B) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad 0 \notin B \wedge 1 \notin B \wedge 2 \notin B, \\ \frac{1}{4}, & \text{jeśli} \quad (0 \in B \wedge 1 \notin B \wedge 2 \notin B) \vee (0 \notin B \wedge 1 \notin B \wedge 2 \in B), \\ \frac{1}{2}, & \text{jeśli} \quad (0 \notin B \wedge 1 \in B \wedge 2 \notin B) \vee (0 \in B \wedge 1 \notin B \wedge 2 \in B), \\ \frac{3}{4}, & \text{jeśli} \quad (0 \notin B \wedge 1 \in B \wedge 2 \in B) \vee (0 \in B \wedge 1 \in B \wedge 2 \notin B), \\ 1, & \text{jeśli} \quad 0 \in B \wedge 1 \in B \wedge 2 \in B. \end{cases}$$

Zmienna losowa X z przykładu 2.4 przyjmuje tylko skończoną liczbę wartości, jej rozkład skoncentrowany jest w trzech punktach 0, 1, 2. Wyznaczanie tego typu rozkładów przez wypisanie wszystkich możliwych przypadków byłoby bardzo uciążliwe przy większej liczbie wartości przyjmowanych przez zmienną losową. Metodę określania takich rozkładów podamy dalej, gdy będziemy omawiali tzw. rozkłady skokowe.

Definicja 2.5. *Dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa* zmiennej losowej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\})^1.$$

Ponieważ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\}$, więc wartość dystrybuanty $F_X(x)$ jest równa prawdopodobieństwu zdarzenia, że zmienna losowa X przyjmuje wartości należące do przedziału $(-\infty, x\rangle$.

Przykład 2.6. Wyznaczymy dystrybuantę zmiennej losowej z przykładu 2.4.

Rozwiązanie. Rozważmy cztery przypadki:
a) Jeśli $x < 0$, to

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\}) = P(\emptyset) = 0.$$

b) Dla $0 \leqslant x < 1$ mamy

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = P(\{(R, R)\}) = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

c) Dla $1 \leqslant x < 2$ mamy

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0 \vee X(\omega) = 1\}) = P(\{(R, R), (0, R), (R, 0)\}) = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

d) W ostatnim przypadku, gdy $x \geqslant 2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x\rangle\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0 \vee X(\omega) = 1 \vee X(\omega) = 2\}) = P(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Przykład 2.7. Niech $(\langle 0, 1\rangle, \mathfrak{B}(\langle 0, 1\rangle), |\cdot|)$, gdzie $|\cdot|$ oznacza miarę Lebesgue'a, będzie przestrzenią probabilistyczną. Wykażemy, że funkcja $X : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ określona wzorem $X(a) = a$ jest zmienną losową i wyznaczymy jej dystrybuantę.

Rozwiązanie. Dla dowolnego zbioru $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mamy $X^{-1}(B) = B \cap \langle 0, 1\rangle$, a więc $X^{-1}(B)$ jest podzbiorem borelowskim przedziału $\langle 0, 1\rangle$; co oznacza, że X jest zmienną losową. Korzystając z określenia prawdopodobieństwa geometrycznego, otrzymujemy

$$F_X(x) = P(\{a \in \langle 0, 1\rangle : a \leqslant x\}) = |\,\langle 0, 1\rangle \cap (-\infty, x\rangle\,| = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

[1] W wielu podręcznikach dystrybuantę zmiennej losowej X określa się wzorem $F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\})$.

W dalszym ciągu zamiast pisać $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ będziemy pisali krótko $P(X \in B)$; w szczególności prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa przyjmuje wartości w przedziale $\langle a, b\rangle$ będziemy oznaczali przez $P(a \leqslant X \leqslant b)$, a dystrybuantę zmiennej X będziemy zapisywali w postaci $F(x) = P(X \leqslant x)$.

Twierdzenie 2.8 (własności dystrybuanty). *Funkcja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa jednowymiarowej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy:*
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
b) *F jest funkcją prawostronnie ciągłą*[2];
c) *F jest funkcją niemalejącą.*

Definicja 2.9. Punkt x_0 nazywamy *punktem skokowym* dystrybuanty F wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x_0) - F(x_0 - 0) > 0$, gdzie $F(x_0 - 0)$ oznacza granicę lewostronną funkcji F w punkcie x_0. Liczbę $F(x_0) - F(x_0 - 0)$ nazywamy *skokiem dystrybuanty F* w punkcie x_0.

Niech $S = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x - 0) > 0\}$ oznacza zbiór wszystkich punktów skokowych dystrybuanty F.

Twierdzenie 2.10. *Zbiór S wszystkich punktów skokowych dystrybuanty F jest co najwyżej przeliczalny.*

Z twierdzenia 2.10 wynika, że punkty skokowe dystrybuanty można ustawić w ciąg (skończony lub nieskończony), tzn. $S = \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$.

Definicja 2.11. Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład *czysto skokowy* wtedy i tylko wtedy, gdy jej dystrybuanta F spełnia warunek

$$\sum_{x_k \in S} (F(x_k) - F(x_k - 0)) = 1$$

Funkcję $p : S \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $p(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0)$ nazywamy *funkcją prawdopodobieństwa* rozkładu zmiennej X. Rozkład prawdopodobieństwa P_X jest określony przez funkcję p wzorem $P_X(B) = \sum\limits_{x_k \in S\cap B} p\,(x_k)$, a dystrybuanta – wzorem

$$F\,(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p(x_k).$$

Rozkłady czysto skokowe określamy podając funkcję prawdopodobieństwa lub (gdy zbiór S jest skończony) za pomocą tabeli postaci

x_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

,

[2] Jeśli $F(x) = P(X < x)$, to F jest funkcją lewostronnie ciągłą.