Rozdział 2

# Przestrzenie liniowe

## 2.1. Przestrzeń i podprzestrzeń liniowa

**2.1.** Wyznaczyć wszystkie elementy przestrzeni liniowej $K^3$, gdzie $K = \{0, 1\}$ jest ciałem z działaniami $\bmod 2$.

**2.2.** Ile elementów ma przestrzeń liniowa $K^n$, gdzie $K$ jest ciałem określonym w zadaniu 2.1?

**2.3.** Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $V = \mathbb{R}_+ - \{0\}$ z działaniami $x \oplus y = xy$ i $\alpha \bullet x = x^\alpha$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.

**2.4.** Niech $V$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $K$. Wykazać, że dla każdego $\mathbf{x} \in V$:
a) $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}$, b) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

**2.5.** Sprawdzić, czy zbiór $X$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $V$, jeśli:
a) $V = \mathbb{R}^2$, $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$;
b) $V = \mathbb{R}^2$, $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 0\}$;
c) $V = \mathbb{R}^3$, $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$;
d) $V = \mathbb{R}^3$, $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$;
e) $V = \mathbb{Z}^2$, $X = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2 : z_1 - iz_2 = 0\}$;
f) $V = W(\mathbb{R})$, $X = W_3(\mathbb{R})$, gdzie $W(\mathbb{R})$ jest przestrzenią wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych;
g) $V = C(\langle 0, 2\rangle)$, $X = \{f \in C(\langle 0, 2\rangle) : f(1) = 0\}$;
h) $V = \mathbb{R}^\infty$, $X = \mathbb{R}_0^\infty$, gdzie $\mathbb{R}_0^\infty$ jest zbiorem ciągów liczbowych o prawie wszystkich wyrazach równych zeru.

**2.6.** Wykazać, że $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$.

**2.7.** Wykazać, że $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k, \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k) \Leftrightarrow \mathbf{y} \in L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k)$.

**2.8.** Sprawdzić, czy $\mathbf{x} \in L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, jeśli:

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$;