15. Wykazać, że jeśli $\mathbf{A}$ jest dodatnio określona, to istnieje macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$, która też jest dodatnio określona.

16. Udowodnić, że macierz $\mathbf{A}$ jest nieujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $\mathbf{B}$ taka, że $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

17. Wykazać, że macierz $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T\mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{B}$ jest macierzą kwadratową, jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbf{B} \neq 0$.

18. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą nieujemnie (niedodatnio) określoną.

a) Wykazać, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ z warunku $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ wynika, iż $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
b) Wykazać, że jeśli $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, to jest dodatnio (ujemnie) określona.

19. Udowodnić, że relacja równoważności form kwadratowych jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

20. Udowodnić, że każda forma kwadratowa f o sygnaturze (p, q) jest równoważna formie kanonicznej

$$h(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2.$$

21. Udowodnić, że forma kwadratowa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest nieujemnie (niedodatnio) określona wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

22. Zbadać określoność form kwadratowych:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3$;
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_3 + 2x_1x_2$.

23. Zbadać, w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, określoność formy kwadratowej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jeśli:

a) $f(\mathbf{x}) = (m^2 - 1)x_1^2 + 2x_2^2 + 2mx_1x_2$,
b) $f(\mathbf{x}) = (4 - m^2)x_1^2 + x_2^2 + 2mx_1x_2$.

24. Sprowadzić do postaci kanonicznej formy:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_4$.

1.3. Iloczyn skalarny

25. Niech $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem określonym wzorem

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_3.$$

Sprawdzić, czy g jest:

a) funkcjonałem dwuliniowym,
b) funkcjonałem symetrycznym,
c) iloczynem skalarnym.

26. Sprawdzić, czy podane odwzorowanie $(\cdot|\cdot)$ jest iloczynem skalarnym:

a) $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = -x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$;
b) $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$;
c) $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$;
d) $(\cdot|\cdot) : C(\langle a,b\rangle) \times C(\langle a,b\rangle) \to \mathbb{R}$, $(f|g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$.

27. Wykazać, że dla każdego iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ istnieje taka macierz $\mathbf{Q}$ symetryczna i dodatnio określona, iż $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}$.

28. Sprawdzić, czy funkcjonał dwuliniowy $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym i wyznaczyć jego macierz w bazie uporządkowanej $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, jeśli:

a) $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right);$$
b) $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$,
$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right);$$
c) $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$,
$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

29. Funkcjonał dwuliniowy $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ma w bazie uporządkowanej $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Sprawdzić, czy g jest iloczynem skalarnym.
b) Wyznaczyć macierz g w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

30. Niech $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym. Wykazać, że g nie jest funkcjonałem symetrycznym, sprawdzić, czy funkcjonał

$$h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g(\mathbf{x},\mathbf{y}) + g(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

jest iloczynem skalarnym, wyznaczyć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której h ma macierz diagonalną, jeśli:

a) $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_3 - 4x_2y_1 + 4x_3y_2$,
b) $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 - x_1y_2 + 2x_2y_3$.

31. Niech $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym. Sprawdzić, czy funkcjonał dwuliniowy $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ określony wzorem

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}\left(g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{y}, \mathbf{x})\right)$$

jest iloczynem skalarnym oraz wyznaczyć macierz h w bazie $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, jeśli:

a) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 4x_1y_2 + 6x_2y_3$,
$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$;

b) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 - 2x_1y_2 + 2x_2y_3$,
$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

32. Niech $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ funkcjonał g jest funkcjonałem symetrycznym, iloczynem skalarnym, jeśli:

a) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2mx_3y_3 - mx_1y_2 - mx_2y_1$,
b) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - 2mx_1y_3 - (m-2)x_3y_1$,
c) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 - mx_2y_3 - (3-m)x_3y_2$,
d) $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2m_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + mx_2y_3 + mx_3y_2$?

33. Obliczyć cosinus kąta między wektorami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$, jeśli:

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

34. Obliczyć cosinus kąta między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, gdzie:

a) $\mathbf{a} = \mathbf{x} + 2\mathbf{y}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{x} - \mathbf{y}$, jeśli wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ tworzą bazę ortonormalną rzeczywistej przestrzeni unitarnej V;
b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{x} + \mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 2$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 1$;
c) $\mathbf{a} = \mathbf{x} + 2\mathbf{y}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{x} - \mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{x}\| = 1$, $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{3}$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{1}{6}\pi$;
d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{b} = \mathbf{x} + 2\mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{2}{3}\pi$;

e) $\mathbf{a} = \mathbf{x} - 2\mathbf{y}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{x} + \mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{1}{3}\pi$;
f) $\mathbf{a} = 2\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x} + 4\mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{x}\| = 2 \cdot \|\mathbf{y}\| \neq 0$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{1}{3}\pi$;
g) $\mathbf{a} = \mathbf{x} + 3\mathbf{y}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{x} - \mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{y}\| = 2 \cdot \|\mathbf{x}\| \neq 0$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{1}{6}\pi$;
h) $\mathbf{a} = 2\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{y}\| = 2 \cdot \|\mathbf{x}\| \neq 0$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{2}{3}\pi$;
i) $\mathbf{a} = 2\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x} - 3\mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{x}\| = 4 \cdot \|\mathbf{y}\| \neq 0$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{1}{3}\pi$;
j) $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x} - 2\mathbf{y}$, jeśli $\|\mathbf{x}\| = 4 \cdot \|\mathbf{y}\| \neq 0$ i kąt między wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ jest równy $\frac{1}{3}\pi$.

35. Udowodnić, że jeśli niezerowe wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ są parami ortogonalne, to są liniowo niezależne.

36. Udowodnić, że jeśli niezerowe wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k$ są parami ortogonalne, to są liniowo niezależne.

37. Obliczyć normę wektora $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$, gdzie $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

38. Wykazać, że jeśli $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni V, to dla każdego $\mathbf{x} \in V$:

a) $\mathbf{x} = (\mathbf{x}|\mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_1 + (\mathbf{x}|\mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_2 + \ldots + (\mathbf{x}|\mathbf{v}_n)\,\mathbf{v}_n$,
b) $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}|\mathbf{v}_1)^2 + (\mathbf{x}|\mathbf{v}_2)^2 + \ldots + (\mathbf{x}|\mathbf{v}_n)^2$.

39. Udowodnić, że w dowolnej przestrzeni unitarnej V:

a) $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$, podać interpretację geometryczną tego twierdzenia dla $V = \mathbb{R}^2$;
b) jeśli $(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_j) = 0$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., k$, to

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{x}_k\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + ... + \|\mathbf{x}_k\|^2 \,;$$

c) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right)$ (*prawo równoległoboku*).

40. Wykazać, że jeśli $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ i $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = r$, to $\left\|\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})\right\| < r$.

41. Niech $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ będą wektorami niezerowymi. Udowodnić, że jeśli $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, to istnieje $\alpha > 0$ takie, że $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

42. Obliczyć wartość bezwzględną cosinusa kąta między wektorami

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ i } \mathbf{b} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

jeśli wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ spełniają warunek $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \neq 0$.

43. Niech V będzie przestrzenią unitarną, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Liczbę $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ nazywamy *odległością* wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$. Udowodnić, że funkcja $d : V \times V \to \mathbb{R}$ określona wzorem $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ spełnia warunki:

a) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in V} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \wedge (d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})$,
b) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in V} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
c) $\bigwedge\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

44. Obliczyć odległość między wektorami $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ w przestrzeni wszystkich wielomianów nad ciałem liczb rzeczywistych z iloczynem skalarnym określonym wzorem $(\varphi_1|\varphi_2) = \int\limits_0^2 \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt$, jeśli:

a) $\psi_1(t) = 2t^2 + 3t$, $\psi_2(t) = t + 3$,
b) $\psi_1(t) = t^2 - 2t$, $\psi_2(t) = t - 3$.

45. Sprawdzić, czy podane macierze są ortogonalne:

a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

46. Podać przykład takiej macierzy ortogonalnej stopnia 3, że jej pierwsza kolumna jest wektorem $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

47. Wykazać, że jeśli macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są ortogonalne, to macierz $\mathbf{AB}$ też jest ortogonalna. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

48. Niech $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ będą macierzami ortogonalnymi. Czy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

jest ortogonalna?

49. Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą macierzami ortogonalnymi stopnia 3. Czy wynika stąd, że macierz $\mathbf{C}$ jest ortogonalna, jeśli:

a) $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$, b) $\mathbf{C} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B}$?

50. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą macierzami ortogonalnymi stopnia $n > 1$. Czy wynika stąd, że macierz $\mathbf{C}$ jest ortogonalna, jeśli:
a) $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$, b) $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$, c) $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, d) $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{-1}$,
e) $\mathbf{C} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, f) $\mathbf{C} = \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}$, g) $\mathbf{C} = \frac{2}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{3}\mathbf{B}$?

51. Niech $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym określonym wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 \\ x_4 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć cosinus kąta między wektorami $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\mathbf{e}_2)$, gdzie $\mathbf{e}_j$ oznacza j-ty $(j = 1, 2, 3, 4)$ wektor jednostkowy.

52. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełnia warunek $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, jeśli:

a) $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} ax_1 + ax_3 \\ -ax_1 + ax_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

b) $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 - ax_2 \end{bmatrix}$,

c) $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}ax_1 + \frac{1}{4}x_3 \\ \frac{1}{4}x_1 + ax_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$?

53. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym warunek $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Obliczyć cosinus kąta między wektorami $f(\mathbf{e}_1)$, $f(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, gdzie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ są odpowiednio pierwszym i drugim wektorem jednostkowym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

54. Dla jakiej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest izometrią liniową, jeśli:

a) $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} mx_1 + mx_3 \\ -mx_1 + mx_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

b) $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (1-m)(x_1 + x_3) \\ x_2 \\ (m-1)x_1 + (1-m)x_3 \end{bmatrix}$?

55. Dla jakiej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ określone wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot x_3 \\ mx_2 - mx_4 \\ -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_3 \\ mx_2 + mx_4 \end{bmatrix}$$

jest izometrią liniową?

56. Udowodnić, że jeśli przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest izometrią liniową, to:

a) przekształcenie f jest nieosobliwe,
b) przekształcenie f^{-1} jest izometrią liniową.

57. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie g jest bijekcją, bedą przekształceniami liniowymi. Czy z warunku, że $g^{-1} \circ f$ jest izometrią liniową wynika, że f jest izometrią liniową? Odpowiedź uzasadnić.

58. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie f jest bijekcją, bedą przekształceniami liniowymi. Czy z warunku, że $g \circ f^{-1}$ jest izometrią liniową wynika, że g jest izometrią liniową? Odpowiedź uzasadnić.

59. Niech W będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Wykazać, że $W^\perp$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

60. Wyznaczyć zbiór wszystkich wektorów ortogonalnych do podprzestrzeni liniowej $W = L(\mathbf{a})$, jeśli:
a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$,
b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.

61. Wyznaczyć uzupełnienie ortogonalne podprzestrzeni W, jeśli:
a) $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$,
b) $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 + x_2 + x_4 = 0\right\}$.

1.3.1. Ortogonalizacja Grama-Schmidta

62. Wyznaczyć bazę ortogonalną przestrzeni $W \subset \mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$, gdzie:

a) $W = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,

b) $W = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,

c) $W = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,

d) $W = L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$,

e) $W = L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,